

Índice general

1. Introducción	1
2. Preliminares	3
2.1. Cifras significativas	3
2.2. Medidas y unidades	4
2.3. Notación científica	4
2.4. Vectores	4
2.4.1. Aproximación geométrica a vectores	5
2.4.2. Aproximación algebraica a vectores	6
2.4.3. Cambio en una cantidad	6
3. Interacciones y movimiento	9
3.1. Diagramas mostrando cambios de velocidad	9
3.1.1. Movimiento uniforme	9
3.2. Velocidad	11
3.2.1. Rapidez promedio	11
3.2.2. Rapidez instantánea comparada a rapidez promedio	11
3.3. Movimiento en varias dimensiones	12
3.3.1. Vector de Posición	12
3.3.2. Determinando la velocidad promedio desde un cambio en la posición	13
3.3.3. Velocidad instantánea	14
3.3.4. Aceleración	17
3.3.5. Momentum	18
4. Dinámica	19
4.1. Sistemas inerciales	19
4.1.1. Transformaciones de Galileo	19
4.2. Principios de la Mecánica	20
4.3. Principio de Momentum	21
4.3.1. Sistema y entorno	21
4.3.2. Segunda Ley de Newton	21
4.3.3. Fuerza de un resorte	23
4.3.4. Integración analítica	24
4.3.5. Ecuación de movimiento	25
4.3.6. Caso especial: masa constante	25

4.3.7.	Caso especial: Fuerza y masa constante	25
4.3.8.	Ecuación de la trayectoria	27
4.3.9.	Conservación de momentum	27
4.3.10.	Ejemplos movimiento parabólico	30
4.3.11.	Movimiento parabólico completo	32
4.3.12.	Tercera Ley de Newton	34
4.4.	Aplicaciones de las leyes de Newton	35
4.5.	Ingredientes de problemas de dinámica	37
4.5.1.	El peso	37
4.5.2.	Fuerza normal	37
4.5.3.	Cuerdas ideales	38
4.5.4.	Poleas ideales	38
4.5.5.	Aplicaciones en entornos sin fricción	39
4.6.	Fricción	39
4.6.1.	Fricción dinámica	39
4.6.2.	Fricción estática	39
4.7.	Problemas resueltos	40
5.	Momentum	47
5.1.	Dinámica de un sistema de partículas	47
5.2.	Centro de masa	48
5.2.1.	Centro de masa de un sistema continuo	51
5.3.	Conservación del momentum	53
5.4.	Sistemas de masa variable	53
5.4.1.	Cohete en el espacio libre	55
5.5.	Impulso	57
5.5.1.	Transporte de momomentum	57
6.	Trabajo y Energía	59
6.1.	Movimiento en una dimensión	59
6.2.	Integral de línea	60
6.3.	Ecuación de la trayectoria	61
6.4.	Teorema de Trabajo-Energía	62
6.5.	Cálculo del trabajo	63
6.5.1.	Fuerza gravitacional constante	63
6.5.2.	Trabajo realizado por la fuerza de fricción	63
6.6.	Fuerzas conservativas	64
6.7.	Conservación de la energía	67
6.8.	Ejemplos de energía potencial	68
6.8.1.	Energía potencial de un campo de fuerza uniforme	68
6.9.	Fuerzas no conservativas	69
6.10.	Energía potencial de un resorte	70
6.11.	Potencia	72
6.12.	Colisiones	73
6.12.1.	Colisiones elásticas	73

6.12.2. Colisiones inelásticas	75
6.13. Colisiones y coordenadas de centro de masa	78
6.13.1. Ángulo de dispersión	81
6.14. Problemas resueltos	83
7. Movimiento del cuerpo rígido	87
7.1. Movimiento Circular Uniforme I	87
7.1.1. Movimiento generalizado en coordenadas polares	88
7.1.2. Vector de velocidad angular	89
7.1.3. Movimiento circular uniforme II	90
7.2. Momento angular y torque para una partícula	91
7.3. momento angular para un cuerpo rígido	92
7.4. Principio de Momento Angular	95
7.4.1. Conservación del momento angular	96
7.5. Energía cinética rotacional	96
7.6. Teorema de los ejes paralelos	97
7.7. Resumen	98
7.8. Ecuaciones de Euler	98
7.8.1. Estabilidad del movimiento rotacional	99
7.9. Cálculo de momentos de inercia	101
7.9.1. Varilla uniforme	101
7.9.2. Disco uniforme	101
7.9.3. Cilindro uniforme	101
7.9.4. Esfera	102
7.10. Movimiento de rodadura sin deslizamiento	102
7.11. Problemas resueltos	104
7.12. Ejercicios	116
8. Fuerzas centrales	117
8.1. Problema de dos cuerpos	117
8.2. Propiedades generales del movimiento bajo fuerzas centrales	120
8.2.1. El movimiento está confinado a un plano	120
8.2.2. Cantidades conservadas	121
8.2.3. Encontrando el movimiento en problemas reales	122
8.2.4. Ley de áreas iguales	123
8.2.5. Diagramas de energía	123
8.3. Ecuación de las trayectoria	125
8.3.1. $0 \leq \epsilon \leq 1$: Órbitas elípticas	125
8.3.2. $\epsilon > 1$: Órbitas hiperbólicas	128
8.3.3. Potencial gravitacional	130
8.4. Gravitación	130
8.5. Leyes de Kepler	131
8.6. Campo gravitacional	134
8.7. Velocidad de escape	136
8.8. Fuerzas ficticias	136

8.8.1. Mareas	137
8.8.2. Principio de equivalencia	138
8.9. Problemas resueltos	139
9. Oscilador armónico	143
9.1. Oscilador armónico	143
9.1.1. Energía del oscilador armónico	144
9.2. Oscilador forzado y amortiguado	145
9.2.1. Oscilador forzado	147
9.2.2. Oscilador forzado y amortiguado	148
9.2.3. Oscilador amortiguado	149
10. Relatividad Especial	153
10.1. Principio de relatividad	153
10.2. Transformaciones de Lorentz	153
10.2.1. Propiedades de $F(v_{x'}, V)$	153
10.3. Soluciones	153
10.3.1. $\Gamma < 0$	153
10.3.2. $\Gamma = 0$	153
10.3.3. Ley de adición de velocidades	154
10.3.4. Simultaneidad y orden de eventos	154
10.3.5. Contracción de Lorentz	154
10.3.6. Dilatación temporal	154
10.4. Notación relativista	154

Capítulo 1

Introducción

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Cifras significativas

Toda medida física tiene asociada un error experimental. Si la medida se repite múltiples veces típicamente los resultados siguen una distribución gaussiana en la que el eje x representa el valor medido y el eje el número de medidas, como la que se muestra en la figura ?? . El valor central representa el valor numérico que se repite más veces. En el caso de una distribución gaussiana, la distancia entre dos puntos de la curva a la mitad de la altura de se conoce como el intervalo a 1σ y representa un intervalo en que es obtenida la medida el 68% de las veces. El intervalo a 3σ es obtenido el 99.7%, mientras que la medida cae en el intervalo a 5σ el 99.9999% de las veces. La convención es escribir la medida con el error a 1σ en la forma

$$\begin{aligned} \text{cantidad física} &= \text{medida} \pm 1\sigma \\ &= \text{medida}(1\sigma). \end{aligned}$$

Así por ejemplo la medida de alguna distancia d puede escribirse como

$$\begin{aligned} d &= (1.23 \pm 0.01)\text{m} \\ &= 1.23(1)\text{m}. \end{aligned}$$

Las cifras significativas de una cantidad física son todos aquellos dígitos que contribuyen a la precisión del número. Por consiguiente el número de cifras significativas esta determinado por todos los dígitos contados a partir del error a 1σ . En el ejemplo anterior, el número directamente afectado por el error es el segundo decimal correspondiente al dígito 3 y por consiguiente la cantidad física tiene 3 cifras significativas. Al hacer operaciones con cantidades física existen métodos para propagar los errores hasta el resultado final. Una regla simple, cuando se tienen las cantidades físicas con sus cifras significativas pero sin especificar su error, es escribir el resultado final con un número de cifras significativas igual al de la cantidad con mayor número de cifras significativas de las involucradas en la operación. Por ejemplo, al calcular el volumen de un cubo con los lados especificados a tres cifras significativas como $A = 3.66\text{ m}$ $B = 8.45\text{ m}$ y $C = 2.11\text{ m}$,

$$V = ABC = 65.3\text{ m}^3,$$

también con tres cifras significativas.

Factor	Nombre	Símbolo	Factor	Nombre	Símbolo
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^3	kilo	k	10^{-3}	mili	m
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^1	deka	da	10^{-1}	deci	d

Tabla 2.1: Prefijos SI

2.2. Medidas y unidades

Las cantidades básicas en mecánica son longitud [L], masa [M] y tiempo [T], en donde se ha usado una letra entre corchete para denotar el símbolo dimensional de la cantidad física. En el Sistema Internacional (SI) de unidades estas cantidades se miden en metros (m), kilogramos (kg) y segundos (s).

Es esencial usar unidades SI en ecuaciones físicas; por lo que usualmente se requiere que se transformen cantidades en otras unidades al sistema de unidades SI. Una forma conveniente es multiplicar por factores iguales a 1, como:

$$1 = \frac{\text{km}}{1\,000\text{ m}}$$

$$1 = \frac{3\,600\text{ s}}{\text{hour}} \quad (2.1)$$

Por ejemplo

$$60 \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{hour}}} \frac{1\,000\text{ m}}{\cancel{\text{km}}} \frac{\cancel{\text{hour}}}{3\,600\text{ s}} = 16.7\text{ m s}^{-1}. \quad (2.2)$$

2.3. Notación científica

En los fenómenos de la naturaleza hay involucradas escalas que varían por muchos ordenes de magnitud¹, por lo cual es conveniente usar la notación científica y las abreviaturas correspondientes a las diferentes escalas de 10 tanto en potencias positivas como negativas como las mostradas en la tabla ??

Los 20 prefijos usados para formar los múltiplos y submúltiplos de SI están dados en la Tabla 2.1

2.4. Vectores

Las cantidades completamente especificadas por su magnitud se llaman escalares. Ejemplos de escalares son la masa, temperatura, rapidez, etc.

¹Ver por ejemplo <http://htwins.net/scale2/>

Hemos visto que tanto la posición, como la velocidad y la aceleración, no sólo tienen asociadas una magnitud, sino también una dirección. Un ejemplo de vector corresponde al asociado a la aceleración gravitacional el cual tiene una magnitud de 9.8 m/s^2 .

2.4.1. Aproximación geométrica a vectores

Ejemplos de vectores: magnitud y dirección

- Desplazamiento [L]
- Velocidad [L/T]
- Aceleración [L/T²]
- Fuerza [M L/T²]
- Momentum [M L/T]
- Momentum angular [ML²/T]
- Torque [ML²/T²]

Una característica muy importante de los vectores es que sus propiedades de magnitud y dirección son independientes del sistema de coordenadas elegido. En términos vectoriales, dos desplazamientos hacia el norte de 3 metros son completamente equivalentes.

Ejemplos de escalares: magnitud pero no dirección

- Longitud [L]
- Tiempo [T]
- Masa [M]
- Área [L²]
- Volumen [L³]
- Densidad [M/L³]
- Energía [ML²/T²]
- Temperatura [\mathcal{T}]

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \text{si} \quad \begin{array}{l} |\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| \\ \mathbf{A} \parallel \mathbf{B} \end{array}.$$

Además

$$A \equiv |\mathbf{A}|. \quad (2.3)$$

Suma de vectores ver [vectores.pdf](#) Suma sólo tiene sentido para el mismo para el mismo tipo de vectores

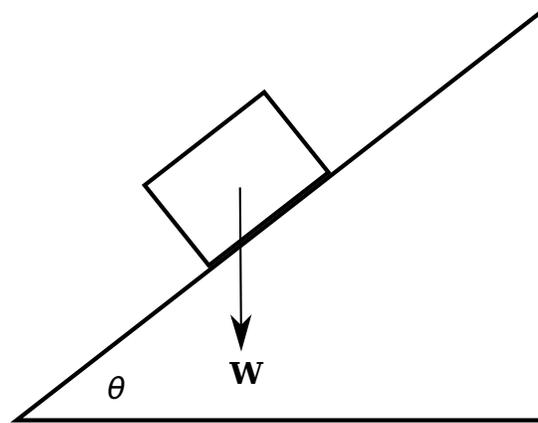


Figura 2.1: Peso

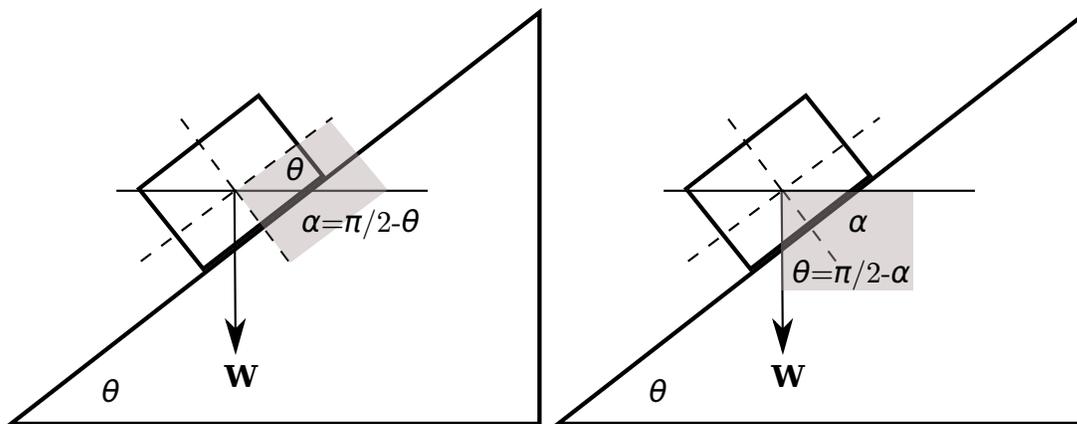


Figura 2.2: Peso

2.4.2. Aproximación algebraica a vectores

Ejemplo: Sea \mathbf{r} la distancia desde algún punto sobre la vertical de un círculo de radio R hasta su punto más inferior: P , como se ilustra en la figura 2.3. Calcule el producto escalar entre \mathbf{r} y \mathbf{f} cuando el punto sobre (a) la vertical está en el centro del círculo (C), (b) cuando está en el punto inferior P y (c) cuando está en el punto superior. Indique claramente la dirección del vector resultante. Si \mathbf{f} es una fuerza indique además el sentido del giro del círculo con un eje pasando por su centro.

Solución: Para el eje z saliendo de la página (a) $\mathbf{r} \times \mathbf{f} = -Rf\hat{\mathbf{k}}$, dirección horaria de giro (b) $\mathbf{r} \times \mathbf{f} = \mathbf{0} \times \mathbf{f} = \mathbf{0}$ y (c) $\mathbf{r} \times \mathbf{f} = -2Rf\hat{\mathbf{k}}$, dirección horaria de giro.

2.4.3. Cambio en una cantidad

Frecuentemente queremos calcular el cambio en una cantidad. Por ejemplo, podríamos desear conocer el cambio en la posición de un objeto en movimiento, o el cambio en la velocidad durante un intervalo de tiempo. La letra Δ (delta mayúscula que sugiere una “ d de diferencia”) se usa para denotar el cambio en una cantidad ya sea escalar o vectorial.

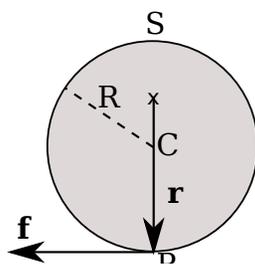


Figura 2.3: Ejemplo productor vectorial

Capítulo 3

Interacciones y movimiento

3.1. Diagramas mostrando cambios de velocidad

Esta parte de las notas está basada en el libro *Matter & Interactions* [7]

En diagramas físicos la velocidad de un objeto es representada por un vector: una línea con una flecha. La cola de la flecha se coloca donde el objeto está localizado, y la punta de la flecha en la dirección del movimiento del objeto. La longitud de la flecha es proporcional a la rapidez del objeto. De este modo la velocidad se describe como un vector. A la magnitud de la velocidad se le llama rapidez.

3.1.1. Movimiento uniforme

Suponga que observa una roca moviéndose en el espacio exterior bastante alejada de cualquier objeto. No sabemos que la hizo mover la primera vez; presumiblemente hace mucho tiempo una interacción le dio alguna velocidad y esta ha estado moviéndose desde entonces en el espacio vacío.

Es un hecho observacional que tal objeto aislado se mueve con una rapidez constante (que no cambia), en una línea recta. Su velocidad no cambia (ni su dirección ni su rapidez cambia). A tal movimiento con velocidad constante le llamaremos movimiento uniforme y es ilustrado en la figura 3.1

Si observamos un electrón cambiando la dirección de su velocidad, podemos atribuirlo al efecto de repulsión de un electrón cercano como se muestra en la figura 3.2 (a). Mientras que si el electrón se está acelerando en línea recta, cambiando la magnitud de su velocidad pero manteniendo la



Figura 3.1: Movimiento uniforme: sin cambio en la rapidez o la dirección.

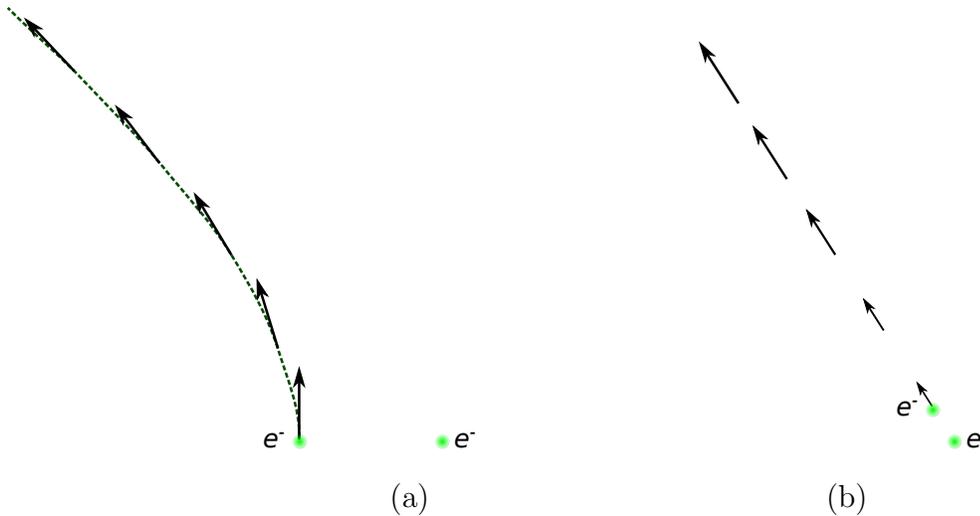


Figura 3.2: Cambio en dirección

dirección, lo podemos atribuir a otro electrón a lo largo de su línea de movimiento como se muestra en la figura 3.2 (b)

Podemos establecer entonces,

Antes de la Primera Ley de Newton, se pensaba que se requería un empuje constante para mantener algo en movimiento. Con La Primera Ley de Newton, o Ley de Inercia, ¡No se necesitan interacciones para que algo se mueva! (o, como veremos luego, rote)

Para mantener una silla moviéndose a velocidad constante hay que estar empujándola todo el tiempo. La primera Ley de Newton ¿implicaría que la silla se debe mover a velocidad constante sin que nadie la esté empujando? ¿El empuje constante debería cambiar la dirección o la rapidez del movimiento? ¿está situación de la vida diaria viola la primera ley de Newton?

El factor que complica la situación es que sus manos no son lo único que interacciona con la silla. El piso también interacciona con la silla en una forma que llamamos fricción. Si se empuja la silla lo suficiente como para compensar *exactamente* la fricción, la suma total de las interacciones es *cero*, y la silla se mueve a velocidad constante como lo predice la primera ley de Newton. Si el empuje es más fuerte que la fuerza que hace el piso, entonces la rapidez de la silla se debe incrementar.

Es muy difícil observar movimiento sin fricción en la vida diaria, debido a que los objetos interaccionan con otros objetos incluyendo el aire, superficies, etc. Esto explica porque le tomo a la gente tanto tiempo entender claramente la relación entre interacción y cambio (Newton nació en 1542).

Ejemplo 3.1.1. Las frases correctas son ?? y ??.

Incluso en presencias de fricción el reposo es algo relativo al observador. Un borrador en reposo sobre una mesa está en reposo relativo para los observadores en el salón, pero no para un observador en la luna, el sol, el centro de la galaxia, etc.

La humanidad tardó aún mucho más tiempo en determinar cuales de las fuerzas en la naturaleza eran fundamentales y cuales eran resultaban por el efecto combinando de interacciones fundamentales.

Hoy sabemos que en la naturaleza existen cuatro interacciones fundamentales

- Interacción gravitacional.

- Interacción electromagnética.
- Interacción débil.
- Interacción fuerte.

Las demás fuerzas como la fuerza nuclear, las fuerzas de Van der Waals, la fricción, la viscosidad, etc., son remanentes de las interacciones fundamentales.

3.2. Velocidad

3.2.1. Rapidez promedio

La rapidez es la magnitud del vector velocidad, \mathbf{v} , y por consiguiente es una cantidad escalar:

$$\bar{v} = |\mathbf{v}| = \frac{d}{t}, \quad (3.1)$$

donde \bar{v} es la *rapidez promedio*, d es la distancia recorrida durante un tiempo t . En SI (Système Internationale) de unidades, la rapidez promedio se mide en metros por segundo, y se abrevia con m s^{-1} .

De (3.1)

$$\begin{aligned} d &= \bar{v}t \\ t &= \frac{d}{\bar{v}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Es importante notar que las ecuaciones (3.2) son dimensionalmente correctas, por ejemplo

$$\begin{aligned} [d] &= [\bar{v}] [t] \\ L &= \frac{L}{T} \times T \\ L &= L. \end{aligned} \quad (3.3)$$

3.2.2. Rapidez instantánea comparada a rapidez promedio

Si un carro se mueve a 70 Km/h (kilómetros por hora) durante la primera hora y a 30 km h^{-1} durante la segunda hora, este recorre en total 100 km en 2 horas, con una rapidez promedio

$$\bar{v} = \frac{100 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 50 \text{ km h}^{-1}. \quad (3.4)$$

Note que durante el intervalo de dos horas el carro nunca estuvo viajando realmente a su rapidez promedio de 50 km h^{-1} .

El movimiento es ilustrado en un gráfico de distancia contra tiempo en la figura ?? (detalles en la presentación [aquí](#))

La rapidez instantánea es la rapidez del carro en un instante particular. Para encontrarla debemos observar una distancia corta en la que el carro se mueva en un intervalo de tiempo muy corto, digamos que una centésima de segundo. Si durante algún momento de la segunda hora el carro se mueve 0.0833 metros en 0.01 segundos, su rapidez instantánea es:

$$v = 0.0833/0.01 = 8.33 \text{ m s}^{-1}, \quad (3.5)$$

que en km h^{-1} corresponde a

$$v = 8.33 \frac{\cancel{\text{m}} 3600 \cancel{\text{s}}}{\cancel{\text{s}} 1 \text{ h}} \frac{1 \text{ km}}{1000 \cancel{\text{m}}} = 30 \text{ km h}^{-1}. \quad (3.6)$$

que corresponde a la pendiente de la línea recta en el segundo trayecto en la figura ???. De hecho, a rapidez constante, la rapidez promedio coincide con la rapidez instantánea. En general, para un movimiento en una dimensión, la rapidez instantánea coincide con la pendiente de la curva en el gráfico distancia con respecto al tiempo.

3.3. Movimiento en varias dimensiones

3.3.1. Vector de Posición

Nuestra segunda aplicación de vectores será la descripción de la posición y movimiento de un punto en el espacio en tres dimensiones.

La posición de un punto en el espacio: (x_1, y_1, z_1) no representa un vector. Sin embargo, si movemos el punto a alguna nueva posición, (x_2, y_2, z_2) , entonces el desplazamiento define un vector

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (3.7)$$

$\Delta \mathbf{r}$ significa “cambio de \mathbf{r} ” o $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ (desplazamiento)

Δt significa “cambio de t ” or $t_2 - t_1$ (intervalo de tiempo)

El símbolo Δ (delta) siempre significa “final menos inicial”

$$\Delta \mathbf{r} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \quad (3.8)$$

$\Delta \mathbf{r}$ es un vector verdadero, aunque los valores de la coordenadas inicial y final dependen del sistema de coordenadas, $\Delta \mathbf{r}$ no depende del sistema de coordenadas.

$\Delta \mathbf{r}$ tiene las dimensiones físicas de longitud.

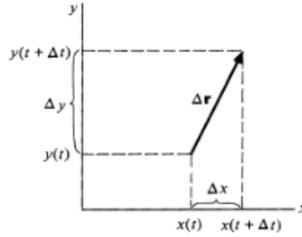
El vector de desplazamiento apunta desde la posición inicial hacia la posición final (final menos inicial).

Aunque los vectores definen desplazamientos en lugar de posiciones, es posible describir la posición de un punto con respecto al origen de un sistema de coordenadas dado por un vector especial, conocido como el *vector de posición*, que se extiende desde el origen hasta el punto de interés. Usaremos el símbolo \mathbf{r} para denotar el vector de posición. La posición de un punto arbitrario P se escribe como

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}. \quad (3.9)$$

A diferencia de los vectores ordinarios, \mathbf{r} depende del sistema de coordenadas. Si \mathbf{R} es el vector desde el origen de un sistema de coordenadas no primado al origen de un sistema de coordenadas primado, tenemos

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{R}. \quad (3.10)$$

Figura 3.3: Desplazamiento entre t_1 y t_2 (Sec 1.6 [3])

3.3.2. Determinando la velocidad promedio desde un cambio en la posición

La posición instantánea de una partícula a un tiempo t_i es

$$\mathbf{r}(t_1) = (x(t_1), y(t_1), z(t_1)) \quad \text{ó} \quad \mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1), \quad (3.11)$$

donde x_1 es el valor de x en $t = t_1$, y así sucesivamente. Al tiempo t_2 la posición es

$$\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2). \quad (3.12)$$

El desplazamiento de la partícula entre los tiempos t_1 y t_2 es

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \quad (3.13)$$

El desplazamiento de una partícula entre los tiempos t y un tiempo posterior $t + \Delta t$ es

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t). \quad (3.14)$$

Ejemplo : En dos dimensiones, esta ecuación es equivalente a

$$\begin{aligned} \Delta x &= x(t + \Delta t) - x(t) \\ \Delta y &= y(t + \Delta t) - y(t). \end{aligned} \quad (3.15)$$

como se muestra en la figura 3.3

Ejemplo: Considere una abeja volando. En un tiempo inicial el vector de posición de la abeja es

$$\mathbf{r}_i = (2, 4, 0)\text{m}, \quad t_i = 0, \quad (3.16)$$

0.1 s después, la posición es

$$\mathbf{r}_f = (3, 3.5, 0)\text{m}, \quad t_f = 0.1\text{s}. \quad (3.17)$$

Realice un diagrama de la situación y encuentre

1. la velocidad promedio
2. La rapidez promedio

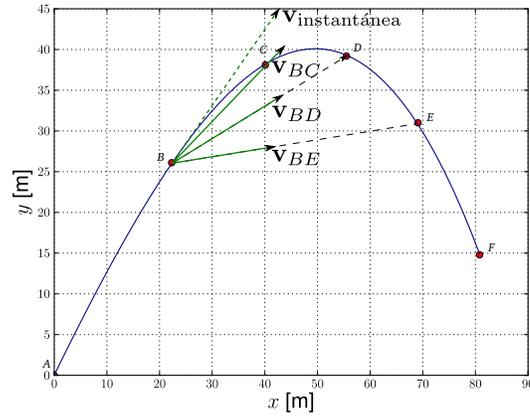


Figura 3.4: Movimiento de una bola

3. La dirección de la velocidad promedio

1.

$$\mathbf{v}_{\text{prom}} = (10, -5, 0) \text{ m s}^{-1}.$$

2.

$$v_{\text{prom}} = 11.18 \text{ m s}^{-1}.$$

3.

$$\hat{\mathbf{v}}_{\text{prom}} = \frac{\mathbf{v}_{\text{prom}}}{v_{\text{prom}}} = (0.804, -0.447, 0)$$

3.3.3. Velocidad instantánea

Considere la curva en la figura 3.4. Los puntos de color rojo marcan la posición de una bola a intervalos de tiempo de un segundo. Mientras que la bola está en el aire, su velocidad está constantemente cambiando, debido a las interacciones con la tierra (gravedad) y con el aire (resistencia del aire).

Suponga que hacemos la pregunta: ¿cual es el valor de la velocidad en el instante preciso que alcanza el punto B?. Está cantidad debería llamarse la velocidad instantánea. Podemos aproximar la velocidad instantánea de la bola, encontrando su velocidad promedio sobre un intervalo de tiempo más grande.

La Tabla muestra el vector de posición de la bola a diferentes tiempos en los puntos ilustrados en la figura 3.4.

loc.	t (s)	Posición (m)
A	0.0	0, 0, 0
B	1.0	(22.3, 26, 1, 0)
C	2.0	(40.1, 38.1, 0)
D	3.0	(55.5, 39.2, 0)
E	4.0	(69.1, 31.0, 0)
F	5.0	(80.8, 14.8, 0)

Tabla 3.1: Tabla mostrando el tiempo transcurrido y la posición de la bola en cada posición de la figura 3.4

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{EB} &= \frac{\Delta \mathbf{r}_{EB}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}_E - \mathbf{r}_B}{t_E - t_B} = \frac{[(69.1, 31.0, 0) - (22.3, 26, 1, 0)] \text{ m}}{(4.0 - 1.0) \text{ s}} \\
 &= (15.6, 1.6, 0) \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
 \mathbf{v}_{DB} &= \frac{\Delta \mathbf{r}_{DB}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}_D - \mathbf{r}_B}{t_D - t_B} = \frac{[(55.5, 39.2, 0) - (22.3, 26, 1, 0)] \text{ m}}{(3.0 - 1.0) \text{ s}} \\
 &= (16.6, 6.55, 0) \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
 \mathbf{v}_{CB} &= \frac{\Delta \mathbf{r}_{CB}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_B}{t_C - t_B} = \frac{[(40.1, 38.1, 0) - (22.3, 26, 1, 0)] \text{ m}}{(2.0 - 1.0) \text{ s}} \\
 &= (17.8, 12.0, 0) \frac{\text{m}}{\text{s}}, \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{EB} &= 15.7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
 v_{DB} &= 17.8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
 v_{CB} &= 21.5 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

¿cual aproxima mejor la velocidad instantánea (figura 3.5)?

La velocidad \mathbf{v} de la partícula a medida que ésta se mueve a lo largo de una trayectoria se define como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \\
 &= \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

que es equivalente a las ecuaciones escalares

$$\begin{aligned}
 v_x &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \\
 v_y &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} \\
 v_z &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt}. \tag{3.21}
 \end{aligned}$$

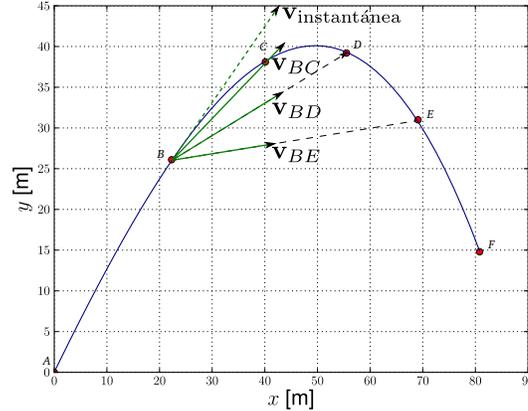


Figura 3.5: Movimiento de una bola

La notación vectorial permite describir el movimiento en tres dimensiones con una sola ecuación, una economía muy grande comparada con las tres ecuaciones que tocaría escribir si se tuviese que hacer de otro modo.

Alternativamente, ya que $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$, obtenemos por simple diferenciación que (los vectores unitarios pueden cambiar bajo diferenciación en otros sistemas de coordenadas diferentes al cartesiano)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}} \\ &= \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \\ &= (v_x, v_y, v_z) \end{aligned} \quad (3.22)$$

En el límite $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta\mathbf{r}$ se convierte en la tangente a la trayectoria, como se indica en la figura 3.5. Sin embargo, la relación

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{r} &\approx \frac{d\mathbf{r}}{dt}\Delta t \\ \Delta\mathbf{r} &= \mathbf{v}\Delta t, \end{aligned} \quad (3.23)$$

que llega a ser exacta en el límite $\Delta t \rightarrow 0$, muestra que \mathbf{v} es paralelo a $\Delta\mathbf{r}$; la velocidad instantánea \mathbf{v} de una partícula es en todas partes tangente a la trayectoria.

La ec. (3.23) puede reescribirse en la forma

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{v}_{\text{prom}}(t_2 - t_1),$$

de modo que el vector de desplazamiento es el promedio del vector de velocidad en el intervalo de tiempo.

Si conocemos la velocidad, tenemos una relación para actualizar la posición a partir de una posición inicial \mathbf{r}_1

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_{\text{prom}}(t_2 - t_1) \\ &= \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_{\text{prom}}\Delta t. \end{aligned}$$

Si se conoce la posición inicial, la velocidad promedio y el intervalo temporal, entonces podemos predecir la siguiente posición del movimiento.

Esta aproximación puede llegar a funcionar muy bien para intervalos de tiempo pequeños pues en tal caso la velocidad promedio es muy similar a la velocidad instantánea. De este forma, para simular el movimiento de un cuerpo por complicado que sea, es suficiente ir actualizando su posición a través de la velocidad promedio, si podemos garantizar que el intervalo de tiempo es suficientemente pequeño.

Ejemplo 3.3.1. ■

Ejemplo 3.3.2. Encontrando \mathbf{v} a partir de \mathbf{r}

La posición de una partícula está dada por

$$\mathbf{r} = A(e^{\alpha t}\hat{\mathbf{i}} + e^{-\alpha t}\hat{\mathbf{j}}), \quad (3.24)$$

donde α es constante. Encuentre la velocidad y bosqueje la trayectoria.

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= A(\alpha e^{\alpha t}\hat{\mathbf{i}} - \alpha e^{-\alpha t}\hat{\mathbf{j}}), \end{aligned} \quad (3.25)$$

o

$$\begin{aligned} v_x &= A\alpha e^{\alpha t} \\ v_y &= -A\alpha e^{-\alpha t}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

La magnitud de \mathbf{v} es

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ &= A\alpha\sqrt{e^{2\alpha t} + e^{-2\alpha t}}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

■

3.3.4. Aceleración

Aceleración promedio:

$$\mathbf{a}_{\text{prom}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} \quad (3.28)$$

Aceleración instantánea

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (3.29)$$

3.3.5. Moméntum

La primera Ley de Newton no permite hacer predicciones cuantitativas. Para hacer estas predicciones se requiere una medida que cuantifique los efectos de las interacciones. Surge entonces la pregunta: ¿qué factores hacen difícil o fácil cambiar la velocidad de un objeto?

Probablemente habrá notado que si dos objetos tienen la misma velocidad pero uno es más liviano que el otro, es más difícil cambiar la velocidad del objeto más masivo.

Una cantidad que se puede entonces asociar con el cambio de movimiento de un cuerpo es el *momentum* o *cantidad de movimiento* instantáneo de una partícula de masa m moviéndose con velocidad instantánea \mathbf{v}

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}, \quad \text{donde: } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2/c^2}}, \quad (3.30)$$

y $c \approx 3 \times 10^8$ m/s es la velocidad de la luz.

Si $\gamma \approx 1$, o equivalentemente, si $|\mathbf{v}| \ll c$:

$$\mathbf{p} \approx m \mathbf{v} \quad (3.31)$$

Capítulo 4

Dinámica

4.1. Sistemas inerciales

4.1.1. Transformaciones de Galileo

Los vectores como la velocidad, la aceleración o el momento son independientes de sistemas de referencia en reposo. Considere ahora dos sistemas de referencia con $S : (x, y, z, t)$ en reposo y $S' : (x', y', z', t')$ moviéndose a velocidad constante \mathbf{V} . Como hipótesis, asumamos que el patrón de medida no se afecta al encontrarse en el sistema de referencia en movimiento, y que el tiempo transcurre de la misma forma en los dos sistemas. Estas hipótesis son válidas si $v \ll c$ y serán reevaluadas cuando se formule la Relatividad Especial en el Capítulo 10. Entonces,

$$t = t' \quad v \ll c. \quad (4.1)$$

Sea \mathbf{r} el vector de posición de un cuerpo relativo al primer sistema de referencia, y \mathbf{r}' su vector de posición relativo al segundo. Asumiendo que los sistemas de referencia coinciden en el tiempo $t = t' = 0$, entonces

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) + \mathbf{R}(t). \quad (4.2)$$

donde el sistema de coordenadas primado se mueve con velocidad \mathbf{V} a largo de \mathbf{R} :

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{V}t, \quad (4.3)$$

y como $d\mathbf{V}/dt = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}' + \mathbf{V}t \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \mathbf{V}t. \end{aligned} \quad (4.4)$$

En el caso especial de un sistema de referencia moviéndose a lo largo del eje x , tenemos

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - Vt \hat{\mathbf{i}}, \quad (4.5)$$

o

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -V & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

A estas relaciones se les conoce como reglas de transformación, y en este caso corresponden a las *Transformaciones de Galileo*. Por ejemplo, las traslaciones espaciales son un caso particular de la ecuación para x' cuando $x' = x + a$ con a una distancia constante. Si el cuerpo se mueve con velocidad $\mathbf{v}(t)$ relativo al sistema S , podemos hallar su velocidad relativa al sistema S' derivando la ec. (4.4) con respecto al tiempo y teniendo en cuenta que la velocidad \mathbf{V} no cambia con el tiempo

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}'}{dt} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{d}{dt}(\mathbf{V}t) \\ \mathbf{v}'(t) &= \mathbf{v}(t) - \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Pero para la aceleración:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}, \quad (4.9)$$

de modo que si la velocidad relativa entre los sistemas es constante, la aceleración de un objeto vista desde los dos sistemas de referencia es la misma.

Los sistemas de referencia moviéndose a velocidad constante se relacionan entre sí a través de las transformaciones de Galileo y reciben el nombre de sistemas inerciales: un sistema de coordenadas inercial, es un sistema de coordenadas que se mueve a velocidad constante. Como la aceleración es la misma desde todos los sistemas inerciales, los diferentes sistemas inerciales observan los mismos cambios en la velocidad de un cuerpo en movimiento y por lo tanto las Leyes de la física responsables de las fuerzas que están cambiando la velocidad el objeto deben ser independientes de los sistemas inerciales con respecto al cual se mida. El movimiento tiene sentido solamente con respecto a un sistema particular de coordenadas, y al momento de describir el movimiento es esencial especificar el sistema de coordenadas que se este usando. De este forma podemos formular el:

Principio de relatividad: Las leyes de la física mantienen su forma en distintos sistemas inerciales.

Además podemos reformular la Primera Ley de Newton:

Primera Ley de Newton: Los cuerpos aislados se mueven uniformemente con respecto a sistemas inerciales.

Un cuerpo sobre el que no actúan fuerzas se llama *cuerpo libre*.

4.2. Principios de la Mecánica

La homogeneidad e isotropía del espacio, y la homogeneidad del tiempo son ejemplos de transformaciones continuas que forman lo que matemáticamente se conocen como Grupos de Lie.

Las cantidades físicas pueden sufrir transformaciones de traslaciones o rotaciones bajo grupos continuos, pero las leyes físicas deben mantener su forma después de estas transformaciones. Más aún, **El Teorema de Noether** establece que por cada transformación continua existe alguna carga conservada. Aunque no demostraremos este teorema si lo ilustraremos con ejemplos específicos. En mecánica este teorema da lugar a tres leyes de conservación importantes, resumidas en la Tabla ??

En este curso estableceremos y usaremos cada uno de estos tres principios.

4.3. Principio de Moméntum

Primero algunas definiciones:

4.3.1. Sistema y entorno

Un *sistema* puede estar conformada por uno o más objetos. Todo lo que no está incluido en el sistema es parte del **entorno**

4.3.2. Segunda Ley de Newton

El cambio de moméntum de un sistema es igual a la fuerza neta actuando sobre el sistema veces la duración de la interacción.

El cambio en el intervalo de tiempo debe ser suficientemente pequeño como para que la fuerza sea aproximadamente constante durante este intervalo de tiempo.

Para entender cada término de esta ecuación, consideremos cada cantidad involucrada.

- Cambio en el moméntum $\Delta\mathbf{p}$: Puede involucrar
 - Cambio en la magnitud del moméntum
 - Cambio en la dirección del moméntum
 - Cambio en ambos
- Fuerza \mathbf{F} : La fuerza cuantifica la cantidad de interacción entre dos objetos. Como la fuerza tiene una determinada magnitud y se ejerce en una dirección, entonces es un vector

Ejemplos:

- Fuerza repulsiva entre un protón y otro protón.
- La fuerza gravitacional atractiva que la tierra ejerce sobre usted.
- La fuerza que un resorte comprimido ejerce sobre su mano.
- La fuerza en una nave espacial de los gases expandiéndose en la maquinaria del cohete.
- Las fuerza neta actuando en un sistema en un instante es el vector de suma de todas las fuerzas ejercidas sobre el sistema por todos los objetos del entorno, las cuales son llamadas fuerzas externas. Puede haber fuerzas internas al sistema, ejercidas por un objeto del sistema en otro objeto del sistema, pero tales fuerzas internas no pueden cambiar el moméntum del sistema. Veremos en detalle el por qué en el siguiente capítulo, pero la idea básica es que las fuerzas internas se cancelan entre sí: una fuerza que el objeto 1 hace sobre el objeto 2 en el sistema, cambia el moméntum del objeto 2. Pero el objeto 2 ejerce una fuerza en dirección opuesta en el objeto 1 que cambia el moméntum del objeto de la forma opuesta, de modo que el cambio en el moméntum de los dos objetos suma cero.

Del Principio de moméntum en la ec. (??) podemos ver que las dimensiones de una fuerza F son

$$[F] = \frac{[M L/T]}{[T]} = [ML/T^2]$$

que en unidades SI define el Newton

$$1 \text{ N} = \text{Kg m/s}^2$$

Con esta definición del impulso podemos establecer el Principio de Momentum en las siguientes palabras:

Ejemplo: Una fuerza constante de $(3, -5, 4)$ N actúa en un objeto durante 10 s. ¿Cuál es el impulso neto aplicado al objeto? ¿Cual fue el cambio en el momentum del objeto?

$$\text{Impulso} = \mathbf{F}_{\text{neto}} \Delta t = (3, -5, 4) \text{ N} \cdot (10 \text{ s}) = (30, -50, 40) \text{ N} \cdot \text{s}. \quad (4.10)$$

El cambio en el momentum del objeto es igual al impulso neto, de modo que

$$\Delta \mathbf{p} = (30, -50, 40) \text{ Kg m/s} \quad (4.11)$$

Cuando conocemos una expresión para la fuerza neta actuando sobre un cuerpo de masa constante m , es posible establecer un proceso iterativo para conocer la trayectoria, como se ilustra en la figura ??.

Con la momentum inicial y el valor para la fuerza, podemos hallar el momentum \mathbf{p}_2 si el tiempo Δt es suficientemente pequeño:

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{F}_{\text{neto}}(t_1) \Delta t$$

De la ecuación para la evolución de la posición después de un Δt suficientemente pequeño:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 &\approx \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_{\text{prom}} \Delta t \\ \mathbf{r}_2 &\approx \mathbf{r}_1 + \mathbf{v}_2 \Delta t, \end{aligned}$$

donde hemos aproximado la velocidad promedio con \mathbf{v}_2 . El procedimiento también funciona si usamos $\mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_{\text{prom}}$. Tenemos entonces que

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \frac{\mathbf{p}_2}{m} \Delta t.$$

En el siguiente paso de la iteración tendríamos:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \mathbf{F}_{\text{neto}}(t_2) \Delta t \\ \mathbf{r}_3 &= \mathbf{r}_2 + \frac{\mathbf{p}_3}{m} \Delta t. \end{aligned}$$

y así sucesivamente

El proceso iterativo que se puede implementar computacionalmente equivale a hacer la integral sobre la ecuación de movimiento dada por el Principio de momentum. Sin embargo, sólo en casos muy específicos se puede realizar analíticamente la integración de la ecuación de movimiento.

Para ilustrar la integración numérica considere el siguiente programa en `vpython` de la solución al problema de una partícula de masa $m = 0.5$ Kg, con velocidad inicial $\mathbf{v}_i = (5, 0, 0)$ m/s, moviéndose bajo la influencia de una fuerza neta gravitacional dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{neto}} &= (0, -mg, 0) \\ &= (0, -4.9, 0) \text{ N}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

t (s)	\mathbf{p} (kg m s ⁻¹)	\mathbf{r} (m)
0.01	(2.5, -0.049, 0)	(0.05,-0.00098, 0)
0.02	(2.5, -0.098, 0)	(0.1, -0.00294, 0)
0.03	(2.5, -0.147, 0)	(0.15,-0.00588, 0)
0.04	(2.5, -0.196, 0)	(0.2, -0.0098, 0)
0.05	(2.5, -0.245, 0)	(0.25,-0.0147, 0)
...

Tabla 4.1: Primeras cinco posiciones de la bola con respecto al punto inicial

La implementación con un paso de integración dado por un $\Delta t = 0.01$ s se ilustra en el siguiente programa:

El resultado del programa es la simulación del evento paso a paso hasta alcanzar la posición mostrada en la figura ??

Tomando el origen de coordenadas en el punto inicial de la bola, podemos obtener las primeras posiciones de la bola repitiendo el proceso manualmente. El resultado de las primeras cinco interacciones se muestra en la Tabla 4.1

Podemos complicar el programa poniendo rebotes sobre el piso. El programa modificado es

Medir la velocidad de un objeto es una tarea familiar, pero ¿cómo medimos la magnitud de una fuerza?

Una forma simple de medir una fuerza es usar el estiramiento o compresión de un resorte. Cuando colgamos un bloque de un resorte, notamos que el resorte se estira una distancia s . Si doblamos el peso notamos que el resorte se estira el doble. De la misma manera un resorte en posición vertical es comprimido una distancia s por el mismo bloque, y el doble de la distancia con dos bloques.

Por consiguiente, podemos usar un resorte para hacer una escala para medir fuerzas, calibrándolo en términos de cuanta fuerza se necesita para producir un determinado estiramiento.

4.3.3. Fuerza de un resorte

Una ley de fuerza describe matemáticamente como una fuerza depende en una situación. Para un resorte, se ha determinado experimentalmente que la fuerza ejercida por un resorte sobre un objeto pegado al resorte está dada por la siguiente ecuación:

$$|\mathbf{F}_{\text{resorte}}| = k|\Delta\mathbf{r}| \quad (4.13)$$

donde $|\Delta\mathbf{r}|$ es la magnitud del vector desplazamiento entre la posición inicial y final del objeto pegado al resorte, y k es la *constante elástica* del resorte.

La constante elástica k es un número positivo, y es una propiedad del resorte en particular. Entre más grande k más fuerza se necesita para estirar el resorte.

Para un resorte moviéndose en una dimensión y con el origen de coordenadas coincidiendo con la posición del objeto cuando el resorte esta relajado, tenemos que la fuerza que el resorte ejerce sobre el objeto cuando se estira una distancia x es

$$\mathbf{F} = -k(x, 0, 0) \quad (4.14)$$

Si consideremos un resorte con un cuerpo pegado a su extremo moviéndose sobre una superficie, debemos considerar la fuerza de fricción entre el cuerpo y la superficie. La Ley que describe esta

$f(x)$ derivada integral

Tabla 4.2: Tabla de integrales

fuerza fricción f , encontrada también por experimentación, es

$$|\mathbf{f}| = \mu mg, \quad (4.15)$$

donde μ es el *coeficiente de fricción entre el cuerpo y la superficie*, m es la masa del cuerpo y g es la aceleración gravitacional cerca a la superficie de la Tierra. La dirección de la fuerza de fricción es siempre opuesta a la dirección de movimiento.

Con está información y con el principio de momentum podemos simular el movimiento de un cuerpo unido a un resorte sobre una superficie horizontal. La explicación paso a paso del funcionamiento del programa puede encontrarse en este [link](#). Mientras el programa definitivo es

4.3.4. Integración analítica

Al proceso de evolucionar un sistema a través del tiempo se le llama integración del movimiento. En algunos caso especiales dicha integración se puede realizar de forma analítica. El proceso matemático de integrar una función $f(x)$ en el intervalo a, b , corresponde a evaluar el área bajo la curva en ese intervalo

$$\int_a^b f(x) dx \approx f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \dots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n f(x_i) \Delta x_i, \quad (4.16)$$

donde $f(x_0) = 1$, $f(x_n) = b$ y $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Se puede demostrar que

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b \quad (4.17)$$

De este modo, por ejemplo, la integral de la función $f(x) = x$ entre 0 y a es

$$\int_0^a x dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^a = \frac{1}{2}a^2, \quad (4.18)$$

y el área del triángulo correspondiente es

$$\frac{1}{2} \text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2}a^2, \quad (4.19)$$

Así mismo la integral de una rapidez constante v , entre t_1 y t_2 para un movimiento en línea recta

$$\int_{t_1}^{t_2} v dt = v(t_2 - t_1) = d = \text{distancia recorrida entre } t_1 \text{ y } t_2. \quad (4.20)$$

En general, el área de la curva en línea recta de la velocidad en función del tiempo corresponde a la distancia recorrida. Para el gráfico de distancia en función del tiempo de la Fig. ??, tendríamos en el plano velocidad en función del tiempo, una línea recta horizontal entre cero y 1 h, una línea recta de 70 km/h, con área bajo la curva 70 km, y otra línea recta entre 1 h y 2 h con área 30 km para una distancia total recorrida de 100 km.

4.3.5. Ecuación de movimiento

Como para un Δt infinitesimal, la fuerza siempre se puede considerar constante, el principio de momentum se puede reescribir como

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{neta}} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} \\ \mathbf{F}_{\text{neta}} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt}\end{aligned}\quad (4.21)$$

Si \mathbf{F}_{neta} es conocida, a la ec. (4.21), se conoce como ecuación de movimiento.

4.3.6. Caso especial: masa constante

En el caso especial en que la masa del sistema, m , es constante, la ecuación de movimiento puede reescribirse como

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{\text{neta}} &= \frac{dm\mathbf{v}}{dt} \\ \mathbf{F}_{\text{neta}} &= m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ \mathbf{F}_{\text{neta}} &= m\mathbf{a}.\end{aligned}\quad (4.22)$$

4.3.7. Caso especial: Fuerza y masa constante

Si la fuerza neta es constante en dirección y magnitud en el caso de masa constante, la ecuación de movimiento puede integrarse analíticamente. Para simplificar el análisis consideremos una fuerza neta constante sólo con componente en x :

$$\mathbf{F}_{\text{neta}} = (F_x, 0, 0). \quad (4.23)$$

La ecuación de movimiento se reduce a

$$\begin{aligned}a_x &= \frac{F_x}{m} \\ \frac{dv_x}{dt} &= \frac{F_x}{m} \\ dv_x &= \frac{F_x}{m} dt.\end{aligned}\quad (4.24)$$

Integrando a ambos lados de la igualdad, desde un tiempo inicial t_i a un tiempo final t , con $v_{xi} = v_x(t_i)$ y $v_x = v_x(t)$, tenemos

$$\begin{aligned}\int_{v_{xi}}^{v_x} dv_x &= \int_{t_i}^t \frac{F_x}{m} dt \\ v_x - v_{xi} &= \frac{F_x}{m} \int_{t_i}^t dt\end{aligned}\quad (4.25)$$

y despejando en términos de la velocidad final

$$\begin{aligned} v_x &= v_{xi} + \frac{F_x}{m}(t - t_i) \\ &= v_{xi} + \frac{F_x}{m}\Delta t. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Integrando de nuevo

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_{xi} + \frac{F_x}{m}(t - t_i) \\ dx &= v_{xi}dt + \frac{F_x}{m}(t - t_i)dt, \end{aligned} \quad (4.27)$$

e integrando de nuevo con $x_i = x(t_i)$ y $x = x(t)$, tenemos

$$\int_{x_i}^x dx = v_{xi} \int_{t_i}^t dt + \frac{F_x}{m} \int_{t_i}^t dt(t - t_i)dt. \quad (4.28)$$

Haciendo $u = t - t_i$, $du = dt$, obtenemos

$$\int (t - t_i)dt = \int udu = \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}(t - t_i)^2, \quad (4.29)$$

de modo que

$$x - x_i = v_{xi}(t - t_i) + \frac{F_x}{m} \frac{1}{2}(t - t_i)^2 \Big|_{t_i}^t \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} x &= x_i + v_{xi}(t - t_i) + \frac{1}{2} \frac{F_x}{m} [(t - t_i)^2 - (t_i - t_i)^2] \\ x &= x_i + v_{xi}(t - t_i) + \frac{1}{2} \frac{F_x}{m} (t - t_i)^2 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Si eliminamos Δt , usando la ec.(4.26), tenemos

$$\begin{aligned} x &= x_i + v_{xi}(v_x - v_{xi}) \frac{m}{F_x} + \frac{1}{2} \frac{F_x}{m} (v_x - v_{xi})^2 \frac{m^2}{F_x^2} \\ x &= x_i + (v_{xi}v_x - v_{xi}^2) \frac{m}{F_x} + \frac{1}{2} (v_x^2 - 2v_x v_{xi} + v_{ix}^2) \frac{m}{F_x} \\ x &= x_i + \frac{1}{2} (v_x^2 - v_{ix}^2) \frac{m}{F_x}. \end{aligned}$$

Reorganizando términos tenemos

$$v_x^2 - v_{ix}^2 = -2 \frac{F_x}{m} (x - x_i). \quad (4.32)$$

Un ejemplo de fuerza constante, es la fuerza gravitacional sobre un objeto de masa m que se encuentra cerca a la superficie de la tierra:

$$\mathbf{F}_{\text{grav}} = (0, F_y, 0) \approx (0, -mg, 0). \quad (4.33)$$

El signo menos indica que la fuerza va dirigida hacia la superficie de la tierra, donde hemos establecido el origen de coordenadas

Si dicho cuerpo cae libremente desde una altura y_i desde la superficie de la tierra, y con una velocidad v_{yi} , la ecuación para su altura y desde un origen de coordenadas sobre la superficie de la tierra es

$$\begin{aligned} y &= y_i + v_{yi}(t - t_i) + \frac{1}{2} \frac{F_y}{m} (t - t_i)^2 \\ y &= y_i + v_{yi}(t - t_i) - \frac{1}{2} g (t - t_i)^2. \end{aligned} \quad (4.34)$$

mientras que para la componente de la velocidad en y , tenemos de la ec. (4.26)

$$v_y = v_{yi} - g(t - t_i), \quad (4.35)$$

4.3.8. Ecuación de la trayectoria

Para un cuerpo en movimiento vertical bajo la influencia de una fuerza gravitacional constante, tenemos que si la rapidez inicial es v_0 para una altura inicial y_0 , entonces de (4.35)

$$\Delta t = \frac{v_0 - v}{g} \quad (4.36)$$

sustituyendo en ec. (??)

$$\begin{aligned} y - y_0 &= v_0(v_0 - v)/g - \frac{1}{2}g(v_0 - v)^2/g^2 \\ &= v_0^2/g - vv_0/g - \frac{1}{2}(v_0^2/g - 2vv_0/g + v^2/g) \\ &= \frac{1}{2}v_0^2/g - \frac{1}{2}v^2/g \\ &= \frac{1}{2}(v_0^2 - v^2)/g, \end{aligned} \quad (4.37)$$

de donde obtenemos la ecuación de la trayectoria (vec eq. (4.32):

$$v^2 - v_0^2 = -2g(y - y_0), \quad (4.38)$$

Esta última ecuación esta relacionada con la conservación de energía cinética más energía potencia, como se definirá luego.

4.3.9. Conservación de momentum

Volviendo al problema general, de la ec. (4.21) podemos ver que si el momentum es constante (en dirección, magnitud y masa)

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{neta}} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

En otras palabras:

En componentes:

$$\begin{aligned} F_{\text{net},x} &= \frac{dp_x}{dt} \\ F_{\text{net},y} &= \frac{dp_y}{dt} \\ F_{\text{net},z} &= \frac{dp_z}{dt}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

y podemos ver que si alguna dirección del momento es constante, entonces la fuerza neta en esa dirección es cero, y viceversa.

De acuerdo al teorema de Noether debe existir una simetría asociada a la conservación de cada una de las direcciones del momento. La simetría correspondiente es la homogeneidad del espacio en cada una de sus tres direcciones independientes. Esta simetría se refleja en el hecho de que si realizamos un experimento en un sitio determinado y luego lo repetimos en el laboratorio de al lado, del frente, o del piso superior, debemos obtener exactamente el mismo resultado. La regla de transformación correspondiente es que las leyes de la física deben ser invariante bajo el cambio, por ejemplo

$$x \rightarrow x' = x + a,$$

con a constante. En efecto

$$\begin{aligned} F'_{\text{net},x} &= \frac{dp'_x}{dt} \\ &= m \frac{dv'_x}{dt} \\ &= m \frac{d}{dt} \frac{dx'}{dt} \\ &= m \frac{d}{dt} \frac{d(x+a)}{dt} \\ &= m \frac{d}{dt} \frac{d(x)}{dt} \\ &= m \frac{dv_x}{dt} \\ &= \frac{dp_x}{dt} = F_{\text{net},x}, \end{aligned}$$

de modo que dos observadores en dos laboratorios separados por una distancia $x' = x + a$, deben medir la misma cantidad de movimiento para el movimiento de un cuerpo sometido a una fuerza $F_{\text{net},x}$.

En el caso de la fuerza gravitacional, si despreciamos la resistencia del aire, de la ec. (4.33) podemos ver que la fuerza neta en x y en z es cero. Por lo tanto el momento inicial en la dirección x y z se debe conservar.

Supongamos que un cuerpo se mueve bajo la influencia de la fuerza gravitacional en un planeta sin atmósfera con aceleración gravitacional g . Por simplicidad, escogamos como x la dirección inicial

del cuerpo paralela a la superficie del planeta. Dicha dirección se debe mantener constante, de modo que

$$\begin{aligned}\frac{dp_x}{dt} &= 0 \\ m \frac{dv_x}{dt} &= 0 \\ \frac{dv_x}{dt} &= 0 \\ dv_x &= 0 \\ \int_{v_{xi}}^{v_x} dv_x &= 0 \\ v_x - v_{xi} &= 0 \\ v_x &= v_{xi}.\end{aligned}$$

integrando de nuevo

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v_{xi} \\ dx &= v_{xi} dt \\ \int_{x_i}^x dx &= v_{xi} \int_{t_i}^t dt \\ x - x_i &= v_{xi}(t - t_i).\end{aligned}\tag{4.41}$$

y recuperamos la

Combinado las ecuaciones (??) y (4.34) obtenemos la

Ejemplo: Una bola con resistencia de aire despreciable (2D, Fuerza constante): Una bola de masa 500 g está inicialmente en el suelo, en una ubicación (0,0,0) m. La bola es entonces pateada con una velocidad inicial (3, 7, 0) m/s.

1. ¿Donde estará la bola medio segundo después?
2. ¿En que tiempo la bola golpeará el piso?

Haga la aproximación que la resistencia del aire es despreciable.

Solución: Sistema: bola

Entorno: Tierra

Diagrama de cuerpo libre: ver figura

Tiempo inicial: El instante en que el pie ya no esta en contacto con la bola

- 1 Después de medio segundo, y como se ilustra en la figura ??

$$\begin{aligned}x_f &= x_i + v_{xi} \Delta t \\ &= 0 + (3 \text{ m/s})(0.5 \text{ s}) = 1.5 \text{ m}\end{aligned}\tag{4.42}$$

Para el movimiento en y tenemos

$$\begin{aligned} y_f &= y_i + v_{yi}\Delta t - \frac{1}{2}g\Delta t^2 \\ &= 0 + (7 \text{ m/s})(0.5 \text{ s}) - \frac{1}{2}(9.8 \text{ N/kg})(0.5 \text{ s})^2 = 2.275 \text{ m} \end{aligned} \quad (4.43)$$

El vector final de desplazamiento después de 0.5 s es

$$\mathbf{r}_f = (1.5, 2.275, 0) \text{ m} \quad (4.44)$$

Comprobación: Las unidades son correctas, y la bola se ha movido en la dirección apropiada

- 2 Tiempo final: El instante justo antes de que la bola golpee el piso. En ese instante sabemos que $y_f = 0$, de modo que podemos encontrar Δt

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + v_{yi}\Delta t - \frac{1}{2}g\Delta t^2 \\ \Delta t(v_{yi} - \frac{1}{2}g\Delta t) &= 0 \end{aligned}$$

con soluciones

$$\Delta t = 0 \quad \text{o} \quad v_{yi} - \frac{1}{2}g\Delta t = 0 \quad (4.45)$$

El segundo valor es el tiempo cuando la bola retorna al suelo

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{2v_{yi}}{g} \\ &= \frac{2(7 \text{ m/s})}{9.8 \text{ N kg}^{-1}} = 1.43 \text{ s} \end{aligned} \quad (4.46)$$

El movimiento en y es ilustrado en la figura ??, mientras que la trayectoria real es ilustrada en la figura ??.

4.3.10. Ejemplos movimiento parabólico

Ejemplo: Una piedra es lanzada hacia arriba desde lo alto de un edificio con una velocidad inicial de 20 m/s directamente hacia arriba. El edificio tiene 50 m de alto, y la piedra falla en golpear el edificio en su camino hacia abajo.

1. ¿Qué tiempo le toma a la piedra alcanzar su máxima altura?

$$v(t) = v_0 - gt. \quad (4.47)$$

A la altura máxima $v = 0$, y con $v_0 = +20 \text{ m/s}$

$$\begin{aligned} t_{\max} &= \frac{v_0}{g} \\ &= \frac{20}{9.8} \text{ s} \\ &\approx 2.04 \text{ s} \end{aligned} \quad (4.48)$$

2. ¿Cual es la máxima altura desde la base del edificio?:
Tomando el origen de coordenadas en la base del edificio:

$$\begin{aligned} y_{\max} &= y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ &\approx 50 + 20 \times 2.04 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times (2.04)^2 \\ &\approx 70.4 \text{ m}, \end{aligned} \tag{4.49}$$

3. ¿Cual es el tiempo necesario para que la piedra retorne al nivel de la torre?

$$t_{\text{torre}} = 2t_{\max} \approx 4.08 \text{ s}. \tag{4.50}$$

4. ¿La velocidad a ese instante?

$$\begin{aligned} v &= v_0 - g t \\ &\approx 20 - 9.8 \times 4.08 \end{aligned} \tag{4.51}$$

$$v_{\text{torre}} \approx -20 \text{ m/s}, \tag{4.52}$$

La misma magnitud que la velocidad inicial pero con dirección opuesta. La velocidad inicial estaría representada por un vector \mathbf{v}_0 : \uparrow , mientras que $\mathbf{v}_{\text{torre}}$: \downarrow .

5. ¿Cual es la velocidad y posición (desde la base del edificio) después de $t = 5$ s?

$$v(5) \approx 20 - 9.8 \times 5 \approx -29.0 \text{ s}. \tag{4.53}$$

$$y(5) \approx 50 + 20 \times 5 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times 5^2 \approx 27.5 \text{ m}. \tag{4.54}$$

6. ¿Cual es la velocidad y el tiempo cuando la piedra golpea el piso?

$$\begin{aligned} y_0 &= 50 \text{ m} & y_{\text{final}} &= 0 \\ \mathbf{v}_0 &= 20\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s} \end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\tag{4.56}$$

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 - 2g(y_{\text{final}} - y_0) \\ &= v_0^2 - 2g(0 - y_0) \\ &\approx 20^2 + 2 \times 9.8 \times 50, \end{aligned} \tag{4.57}$$

de donde

$$\mathbf{v}_{\text{final}} = -37.1\hat{\mathbf{j}} \text{ m/s}. \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned} t_{\text{final}} &= (v_0 - v_{\text{final}})/g \\ &\approx (20 + 37.1)/9.8 \approx 5.83 \text{ s} \end{aligned} \tag{4.59}$$

4.3.11. Movimiento parabólico completo

En un movimiento parabólico completo, donde un cuerpo es lanzado desde el suelo con cierta velocidad inicial y retorna al suelo sobre una superficie horizontal, podemos especificar el alcance R y la altura máxima y_{\max} en términos de la rapidez inicial, v , y el ángulo de lanzamiento θ . Como $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, 0) = (0, 0, 0)$, tenemos

1. Altura máxima: se obtiene de la condición $v_y = 0$. Reemplazando en la ec. (??)

$$0 = v_{yi} - g\Delta t, \quad (4.60)$$

de modo que para alcanzar y_{\max} el cuerpo se tarda

$$\Delta t = \frac{v_{yi}}{g}. \quad (4.61)$$

Reemplazando (4.61) en (??), tenemos

$$\begin{aligned} y_{\max} &= v_{yi} \frac{v_{yi}}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_{yi}^2}{g^2} \\ &= \frac{v_{yi}^2}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_{yi}^2}{g} \\ &= \frac{1}{2} \frac{v_{yi}^2}{g}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

En términos de la rapidez inicial y el ángulo de lanzamiento tenemos

$$y_{\max} = \frac{v_i^2}{g} \sin^2 \theta, \quad (4.63)$$

La mayor de las alturas máximas se obtiene para $\theta = \pi/2 = 90^\circ$, es decir cuando la velocidad inicial está toda en y .

2. Alcance: se obtiene de la condición: $y = 0$. Reemplazando en la ec. (??)

$$\begin{aligned} 0 &= v_{yi} \Delta t - \frac{1}{2} g \Delta t^2 \\ &= \Delta t (v_{yi} - \frac{1}{2} g \Delta t) \rightarrow \begin{cases} \Delta t = 0 & x = 0 \\ v_{yi} - \frac{1}{2} g \Delta t = 0 & x = R \end{cases}, \end{aligned} \quad (4.64)$$

de modo que para alcanzar R el cuerpo se tarda

$$\Delta t = \frac{2v_{yi}}{g}. \quad (4.65)$$

Reemplazando (4.65) en (??), tenemos

$$\begin{aligned} R &= v_{xi} \frac{2v_{yi}}{g} \\ &= \frac{2v_{xi}v_{yi}}{g}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

En términos de la rapidez inicial y el ángulo de lanzamiento tenemos

$$R = \frac{2v_i^2}{g} \cos \theta \sin \theta, \quad (4.67)$$

y usando

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (4.68)$$

tenemos que $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$, y

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta), \quad (4.69)$$

de modo que el alcance máximo se obtiene para $\theta = \pi/4 = 45^\circ$, es decir, cuando las componentes de la velocidad inicial se reparten por igual en x y y .

Ejemplo El mono

Un mono se suelta de un árbol a una altura h_0 en el mismo instante en el que le disparan. ¿Con que ángulo se debe apuntar al mono para atinarle?

$$\begin{aligned} y_{\text{bala}}(t) &= (v_0 \sin \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \\ y_{\text{mono}}(t) &= h_0 - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Supongamos que en el punto P : $y_{\text{bala}} = y_{\text{mono}}$. Entonces

$$v_0 t_P \sin \alpha = h_0. \quad (4.71)$$

Sea D la distancia horizontal recorrida en el tiempo t_P . Como $v_x = v_0 \cos \alpha = \text{cte}$, entonces

$$(t_P v_0 \cos \alpha) \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = h_0, \quad (4.72)$$

de modo que

$$\tan \alpha = \frac{h_0}{D}. \quad (4.73)$$

Entonces, para atinarle al mono, se debe apuntar directamente a él.

Ejercicio Calcula la mínima distancia para que una bala disparada con una velocidad de 3 m/s, apuntada a la cabeza de un mono de 0.5 m de altura y a 10 m del suelo y que se quede quieto, pase justo por debajo de sus pies. (Respuesta: 95.3 m)

Ejemplo: Para el diagrama en la figura 4.1, calcule la fuerza resultante.

Se escoge un sistema de coordenadas tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= 7\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} \\ \mathbf{F}_2 &= 0\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

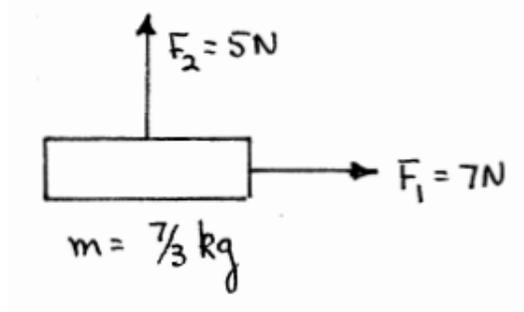


Figura 4.1: Fuerza resultante

Entonces

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 7\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}. \quad (4.75)$$

La aceleración, que esta en la misma dirección que la fuerza esta dada por

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_R}{m} = \frac{7\hat{\mathbf{i}} + 5\hat{\mathbf{j}}}{7/3} = 3\hat{\mathbf{i}} + \frac{15}{7}\hat{\mathbf{j}}. \quad (4.76)$$

Ejemplo: Un disco plano de masa $m = 2 \text{ kg}$, se desliza sobre un lago congelado con una rapidez inicial de $v = 5 \text{ m s}^{-1}$. La fuerza de fricción tiene un valor constante de $f = 4 \text{ N}$ opuesta al movimiento. ¿cuan lejos avanza el disco antes de detenerse?

Escogiendo apropiadamente el sistema de coordenadas, tenemos:

$$-f\hat{\mathbf{i}} = m\mathbf{a}, \quad (4.77)$$

de donde

$$\mathbf{a} = -\frac{f}{m}\hat{\mathbf{i}} = \frac{-4 \text{ N}}{2 \text{ kg}}\hat{\mathbf{i}} = -2\hat{\mathbf{i}} \text{ m s}^{-2}. \quad (4.78)$$

De la cinemática del problema tenemos (eq. (4.38))

$$v_f^2 - v_0^2 = 2ax. \quad (4.79)$$

Cuando el disco se detiene $v_f = 0$, de modo que

$$\begin{aligned} -v_0^2 &= 2ax \\ x &= -\frac{v_0^2}{2a} = 6.25 \text{ m}. \end{aligned} \quad (4.80)$$

4.3.12. Tercera Ley de Newton

Las fuerzas siempre aparecen en pares: si un cuerpo b ejerce una fuerza \mathbf{F}_a en un cuerpo a , entonces debe haber otra fuerza \mathbf{F}_b actuando en el cuerpo b , debido al cuerpo a , tal que

$$\mathbf{F}_b = -\mathbf{F}_a. \quad (4.81)$$

	Rango	Intensidad	Mediador
Fuerza fuerte (núcleos hadrónicos)	10^{-15}m	1	gluones
Fuerza electromagnética (cargas)	∞	10^{-2}	fotón
Fuerza débil	10^{-17}m	10^{-13} (isospín)	W^\pm, Z^0
Fuerza gravitacional (masas)	∞	10^{-38}	gravitón

Tabla 4.3: Fuerzas fundamentales. La intensidad se mide con respecto a la fuerza entre dos protones separados 10^{-15}m

En otras palabras

$$\text{acción} = -\text{reacción} : \quad (4.82)$$

Si un cuerpo aislado sufre una aceleración y no podemos encontrar un objeto externo que sufre una aceleración igual pero opuesta, entonces estaremos en problemas. Un ejemplo más típico de un par acción-reacción es el de dos patinadores sobre hielo intercambiando una pelota.

La segunda ley $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, es válida sólo en sistemas inerciales.

En general, las leyes de Newton sólo son válidas en sistemas inerciales. Entonces ¿cómo se puede decidir o no si un sistema es inercial?:

- Tome un cuerpo libre.
- Si este permanece en un estado de movimiento uniforme, entonces se está en un sistema inercial.

La tierra es básicamente un sistema inercial en el cual la aceleración centrípeta debida a la rotación en el Ecuador es de 0.34m s^{-2}

La estructura y el comportamiento del Universo entero puede ser descrito por la acción de cuatro fuerzas fundamentales descritas en la tabla 4.3

4.4. Aplicaciones de las leyes de Newton

Para ilustrar estos pasos, considere el diagrama de bloques mostrado en la figura 4.2, los cuales se encuentran en reposo. Encuentre la Fuerza ejercida por el bloque B sobre el A , y la fuerza normal de la superficie sobre el bloque B .

\mathbf{F}_A es la fuerza que ejerce el bloque A sobre el bloque B , mientras que \mathbf{F}_B es la fuerza que ejerce el bloque B sobre A . De acuerdo a la tercera ley de Newton

$$\mathbf{F}_B = \mathbf{F}_A . \quad (4.83)$$

Note que la tercera ley de Newton nunca relaciona dos fuerzas actuando sobre el mismo cuerpo; las fuerzas de dos cuerpos diferentes son las que están involucradas en la tercera ley. En la figura 4.2: \mathbf{N} representa la fuerza normal que ejerce el piso sobre el bloque B , mientras que \mathbf{W}_A y \mathbf{W}_B representan los pesos de los bloques A y B respectivamente.

El peso y la normal no son Fuerzas de acción reacción porque ambas Fuerzas actúan sobre un mismo cuerpo: el peso es la fuerza que aplica la tierra a un objeto y la normal la que aplica el plano al objeto.

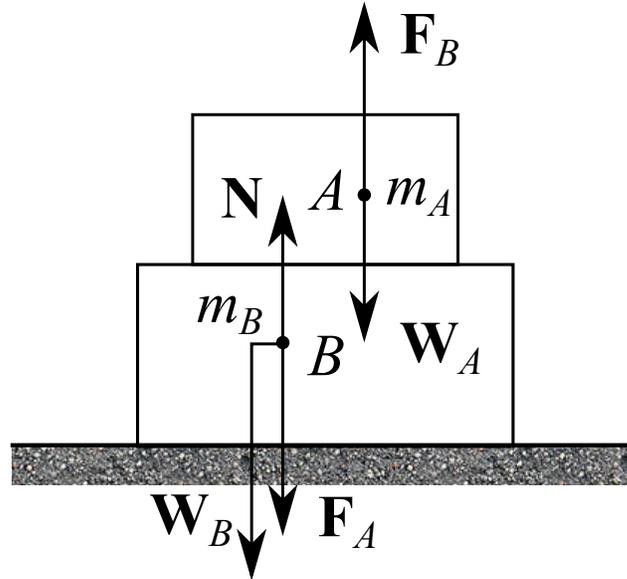


Figura 4.2: Diagrama de fuerzas

Completando el problema de los dos bloques sobre la superficie tenemos, en la dirección $\hat{\mathbf{j}}$:

$$\begin{aligned}
 \text{Ecuaciones de movimiento} & \begin{cases} F_B - W_A = m_A a_A \\ N - F_A - W_B = m_B a_B \end{cases} \\
 \text{Tercera ley de Newton} & \quad F_A = F_B \\
 \text{Constraint equations} & \begin{cases} a_A = 0 \\ a_B = 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

Solucionando las ecuaciones encontramos

$$\begin{aligned}
 F_B = F_A & = W_A \\
 N & = W_A + W_B.
 \end{aligned} \tag{4.85}$$

El objetivo principal de este ejemplo es ayudar a distinguir entre la fuerza que se aplica a un objeto

Ejemplo: Dos astronautas inicialmente en reposo en el espacio libre, tiran de ambos lados de una cuerda. La fuerza con la que el astronauta A puede tirar de la cuerda, F_A es mayor que la del astronauta B , F_B . Sus masas son M_A y M_B y la masa de la cuerda es despreciable. Encuentre el movimiento de la cuerda

Sistema: Cuerda

Entorno: Astronautas

Diagrama de cuerpo libre: (pendiente)

Ecuación de movimiento para la cuerda:

$$\begin{aligned}
 F_{A'} & = F_A \\
 F_{B'} & = F_B
 \end{aligned} \tag{4.86}$$

$$\begin{aligned}
 F_{A'} - F_{B'} &= m_{\text{cuerda}} a_{\text{cuerda}} \\
 F_A - F_B &= m_{\text{cuerda}} a_{\text{cuerda}} \\
 &\approx 0 \times a_{\text{cuerda}} \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.87}$$

de donde

$$F_A = F_B \tag{4.88}$$

y no hay movimiento neto de la cuerda.

4.5. Ingredientes de problemas de dinámica

4.5.1. El peso

Como hemos visto en la definición de la segundo Ley de Newton, la masa es una medida de la resistencia que un cuerpo ofrece a los cambios en su velocidad. En la expresión para la segunda Ley de Newton con masa constante

$$\mathbf{F} = m_I \mathbf{a}, \tag{4.89}$$

m_I es la masa inercial. Es el valor numérico que se obtiene al tirar un cuerpo desplazándose en una superficie sin fricción con un dinamómetro. Si simplemente se sostiene el mismo peso con un dinamómetro sobre la superficie de la tierra, obtenemos la masa gravitacional

$$\mathbf{F} = m_G \mathbf{g} \quad \text{donde} \quad \mathbf{g} \approx (0, -9.8, 0) \text{ m/s}^2, \tag{4.90}$$

Numericamente el valor de ambas masas coinciden $m = m_I = m_G$. La proporcionalidad entre masa inercial y masa gravitacional es una hipótesis en la Mecánica Newtoniana, pero es un resultado de la Teoría General de la Relatividad. Definimos entonces el peso de una partícula como el valor de la masa gravitacional por la aceleración gravitacional

$$|\mathbf{W}| = mg. \tag{4.91}$$

Hay que tener en cuenta sin embargo, que las básculas realmente miden es la fuerza normal

4.5.2. Fuerza normal

Para que un cuerpo se mantenga sobre una superficie se requiere que su peso sea compensado por una fuerza igual y en sentido opuesto ejercida por la superficie sobre el cuerpo. Dicha fuerza se llama la fuerza normal de la superficie y se denota con la letra \mathbf{N}

En general la fuerza normal debe incluir la presión atmosférica. Para una cuerpo con una area A expuesta a la atmósfera sobre una superficie horizontal, se tendría

$$N = mg + P_a A, \tag{4.92}$$

donde P_a es la presión atmosférica.

Ejemplo Tortuga dentro de un ascensor. Suponga que una tortuga, de masa m , está sobre una báscula dentro de un ascensor que se mueve verticalmente con una aceleración de magnitud a_y . Calcule la fuerza normal sobre la tortuga ejercida por la báscula. El diagrama de fuerza se muestra en la Figura (pendiente).

La ecuación de movimiento en la dirección y es (suponiendo una aceleración en la dirección y positiva), con $\mathbf{N} = (0, N, 0)$, $\mathbf{F}_{\text{grav}} = (0, -mg, 0)$, y $\mathbf{a} = (0, a_y, 0)$

$$N - mg = ma_y, \quad (4.93)$$

de modo que

$$N = m(g + a_y) \quad (4.94)$$

Si $a_y = 0$, $N = mg$, y la báscula entrega la masa correcta para la tortuga, sin embargo para una a_y diferente de cero, la báscula registra una “masa” que puede ser mayor o menor que m . Para $a_y = -g$, es decir, que el ascensor se encuentra en caída libre hacia la superficie de la tierra $N = 0$, y la báscula registra un peso cero para la tortuga. De hecho en esta situación la tortuga se encuentra en estado de ingravidez: Un sistema cerrado (el ascensor con su contenido interior) en caída libre en un campo gravitacional constante, es indistinguible de un sistema con gravedad cero, es decir, el mismo ascensor en el espacio exterior alejado de cualquier otro cuerpo.

4.5.3. Cuerdas ideales

Una cuerda ideal es inextensible y su masa es despreciable.

Ejemplo Cuerda no ideal Escriba la ecuación de movimiento para una cuerda de masa m sometida a tensión a ambos lados.

La ecuación de movimiento para eje x a lo largo de la cuerda es

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2 &= m\mathbf{a} \\ T_1 - T_2 &= ma, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{T}_{1,2} = (T_{1,2}, 0, 0)$, y $\mathbf{a} = (a, 0, 0)$. Si la masa de la cuerda es despreciable, entonces

$$T_1 = T_2.$$

El concepto de masa despreciable en una cuerda ideal implica que la tensión es la misma en ambos lados de la cuerda.

4.5.4. Poleas ideales

La masa y el radio de una polea ideal son despreciables. Esto implica que las tensiones a un lado a otro de una cuerda ideal que pasa por una polea ideal son iguales en magnitud. Una polea ideal tiene entonces la propiedad de cambiar la dirección de la tensión sobre una cuerda ideal, sin alterar su magnitud.

4.5.5. Aplicaciones en entornos sin fricción

Ejemplo: Tres vagones de masa M están halados con una fuerza F por una locomotora. Despreciando la fuerza de fricción con los rieles, encuentre las fuerzas en cada carro.

1. Sistema: Los tres vagones
Entorno: los rieles y el aire
Diagrama: (pendiente)

$$F = 3Ma, \quad (4.95)$$

de donde

$$a = \frac{F}{3M} \quad (4.96)$$

2. Sistema: Primer vagón
Entorno: Segundo vagón, rieles, aire
Diagrama: (pendiente)

4.6. Fricción

Se define como fuerza de fricción a la fuerza entre dos superficies de contacto que se opone al movimiento entre ambas superficies (*fuerza de fricción dinámica*, o la fuerza que se opone al inicio del movimiento (*fuerza de fricción estática*). Aunque los procesos interatómicos que dan lugar a la fuerza de fricción son muy complicados se han logrado establecer las siguientes fórmulas empíricas para la fuerza de fricción entre dos superficies

4.6.1. Fricción dinámica

$$\mathbf{f} = \mu_d \mathbf{N}, \quad (4.97)$$

donde \mathbf{N} , es la fuerza normal entre las superficies. El coeficiente de fricción μ_d tiene que ser menor que 1 porque de lo contrario los cuerpos se podrían subir por las paredes.

4.6.2. Fricción estática

$$f > \mu_e N, \quad (4.98)$$

y μ_e es el coeficiente de fricción estático.

Una discusión acerca de la física de los ferrocarriles puede encontrarse en <http://www.jotdown.es/2012/04/el-ferrocarril-ese-gran-desconocido/>.

Superficies	μ_e	μ_d
Acero-Acero	0.15	0.07

Tabla 4.4: Coeficientes de Fricción

Ejemplo Acero-Acero: Ferrocarriles Calcule la distancia de frenado de un tren asumiendo que las ruedas dejan de rotar inmediatamente cuando se mueve a 160 Km/h.

Asumiendo que la fuerza de fricción es constante, tenemos una desaceleración constante de

$$a = -\frac{f_d}{m_{\text{tren}}} = -\frac{\mu N}{m_{\text{tren}}} = -\frac{\mu m_{\text{tren}} g}{m_{\text{tren}}} = -\mu g. \quad (4.99)$$

Aplicando las ecuaciones para movimiento a aceleración constante, en particular la ec. (4.38), tenemos que cuando la rapidez final es cero

$$\begin{aligned} v^2 - v_0^2 &= 2ax \\ -v_0^2 &= 2ax. \end{aligned} \quad (4.100)$$

La distancia recorrida desde el inicio del frenado es

$$\begin{aligned} x &= -\frac{v_0^2}{2a} \\ &= \frac{v_0^2}{2\mu g}, \end{aligned} \quad (4.101)$$

Para $\mu_d = 0.07$, tenemos $x \approx 1440$ m.

La ley empírica de frenado de trenes es:

$$x = \frac{3 v_0^2}{2 |a|} \quad (4.102)$$

donde a es la desaceleración del tren, típicamente alrededor de -2 m/s^2 , de donde podemos obtener un estimado para el coeficiente de fricción

$$\mu = \frac{|a|}{3g} = 0.07.$$

de donde

Ejemplo: Considere la situación ilustrada en la figura ??, donde $m_1 > \mu_d m_2$.

Con la resta en el denominador la aceleración puede ser mayor que g (incluso infinita en el caso $m_1 = m_2$) lo cual no tiene sentido físico.

4.7. Problemas resueltos

Solución

Ejercicio 4.7.1. ??) Escogemos el sistema de referencia en el origen del primer jugador

??) Para el balón

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$x = v_{0x}t.$$

Para el receptor

$$x_r = x_0 + v_1t$$

??) El tiempo de vuelo t_v del balón se encuentra para $y = 0$

$$v_{0y}t_v = \frac{1}{2}gt_v^2$$

$$v_{0y} = \frac{1}{2}gt_v,$$

de modo que

$$t_v = \frac{2v_{0y}}{g}, \quad (4.103)$$

Para el tiempo de vuelo t_v , obtenemos el alcance

$$R = v_{0x}t_v$$

$$= 2v_{0x} \frac{v_{0y}}{g}$$

$$= \frac{2v_0^2 \cos \theta \sin \theta}{g}$$

$$= \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta) \quad (4.104)$$

Para que el receptor pueda atrapar el balón, su posición con respecto al sistema de referencia después de un tiempo t_v debe ser justo el alcance R

$$x_0 + v_1t_v = R$$

$$v_1t_v = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta) - x_0$$

$$2v_1 \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta) - x_0$$

$$v_1 = \left(\frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta) - x_0 \right) \frac{g}{2v_0 \sin \theta}$$

$$= \frac{v_0^2 \sin(2\theta) - gx_0}{2v_0 \sin \theta}$$

??) Evaluando la ec. (6.79)

$$v_1 = 7.52 \text{ m s}^{-1}$$

además

$$t_v = 2.04 \text{ s}$$

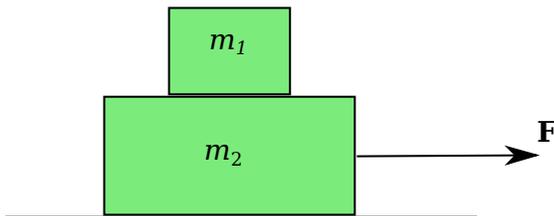
$$R = 35.35 \text{ m}$$

y el receptor se mueve en la misma dirección del balón. ■

Ejercicio 4.7.2. Solución

Ejercicio Repita el problema usando un sistema de referencia rotado 90 grados en la dirección de las manecillas del reloj, para el bloque de masa m_1 .

Ejercicio 4.7.3. (Tomado de [8]) Se coloca un bloque de masa m_1 sobre un bloque de masa m_2 (como se muestra en la figura). Los coeficientes de fricción cinético y estático entre los bloques son μ_k y μ_e respectivamente. Suponer que no hay fricción entre el bloque de masa m_2 y la superficie sobre la cual reposa. Se aplica una fuerza \mathbf{F} horizontal al bloque de masa m_2



1. Dibujar todas las fuerzas que actúan sobre cada bloque.
2. Escribir las ecuaciones de movimiento para cada bloque
3. ¿Cuál es la máxima fuerza que puede aplicarse al bloque que m_2 de modo que los bloques se muevan juntos?
4. ¿Cuál es la aceleración cuando se aplica la fuerza máxima?
5. ¿Qué distancia recorren los bloques a esa aceleración durante dos segundos?
6. Evalúe sus respuestas para $m_1 = 3 \text{ Kg}$, $m_2 = 5 \text{ Kg}$, $\mu_k = 0.1$, $\mu_e = 0.2$

Solución

2) Para m_1

$$m_1 a_1 = f \qquad N_1 - m_1 g = 0 \qquad (4.105)$$

Para m_2

$$m_2 a_2 = F - f \qquad N_2 - N_1 - m_2 g = 0.$$

De modo que

$$a_1 = \frac{f}{m_1} \qquad a_2 = \frac{F - f}{m_2},$$

y

$$f = \mu m_1 g.$$

3) La condición de que los bloques se muevan juntos corresponde a $a_1 = a_2$:

$$\begin{aligned} \frac{f}{m_1} &= \frac{F - f}{m_2} \\ m_2 f &= m_1 (F - f) \\ m_1 F &= f(m_1 + m_2) \\ m_1 F &= \mu m_1 g(m_1 + m_2) \\ F &= \mu g(m_1 + m_2). \end{aligned}$$

F es máxima cuando $\mu = \mu_e$

$$F_{\max} = \mu_e g(m_1 + m_2).$$

4) La aceleración máxima se obtiene de (4.105):

$$a = \frac{f}{m_1} = \mu_e g.$$

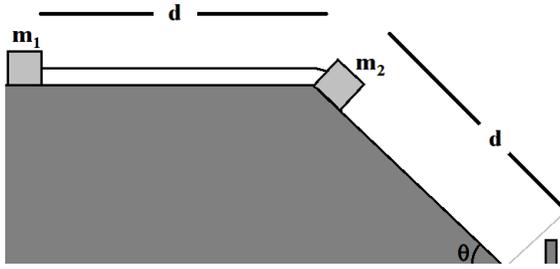
5) Para $t = 2$ s

$$x = \frac{1}{2} a t^2$$

5) $F = 15.7$ N, $a = 1.96$ m/s², $x = 3.92$ m ■

Ejercicio 4.7.4. Solución

Ejemplo 4.7.1. Considere dos bloques de masas m_1 y m_2 unidos por una cuerda inextensible de longitud d . El primer bloque está en un superficie horizontal sin fricción y el segundo desciende desde el reposo por un plano inclinado también sin fricción que forma un ángulo θ con la horizontal. Cuando el bloque 2 llega al piso, después de deslizar una distancia d , este para súbitamente debido a una cuña, y el bloque 1 queda con una velocidad horizontal y cae en un movimiento parabólico (la cuerda no ejerce ningún efecto en la caída parabólica).



1. Realice un diagrama de cuerpo libre de cada bloque en la situación inicial.
2. Demuestre que la rapidez final del bloque 2 cuando llega al piso es

$$v_f = \sqrt{\frac{2dm_2g \sin \theta}{m_1 + m_2}}$$

3. Calcule el alcance horizontal del bloque 1 cuando cae al piso.
4. Determine la razón de masas m_1/m_2 en términos de θ y d , necesaria para que el bloque 1 caiga justo sobre el bloque 2.

Solución

- 2) La aceleración del bloque m_2 se obtiene de

$$\begin{aligned} T &= m_1 a \\ -T + m_2 g \sin \theta &= m_2 a \end{aligned} \quad (4.106)$$

de modo que

$$a = g \frac{m_2 \sin \theta}{m_1 + m_2}, \quad (4.107)$$

La rapidez final después de recorrer una distancia d es

$$\begin{aligned} v_f &= \sqrt{2da} \\ &= \sqrt{\frac{2dm_2g \sin \theta}{m_1 + m_2}}. \end{aligned} \quad (4.108)$$

- 3) Esta es la rapidez inicial del bloque en la dirección horizontal (ángulo de lanzamiento $\alpha = 0$) de m_1 al salir de la superficie horizontal. Por lo tanto, el alcance horizontal es la distancia recorrida en el tiempo de vuelo, que tomando como origen de coordenadas la base del plano inclinado y teniendo en cuenta la rapidez inicial en $y = 0$, es

$$y_f = 0 = d \sin \theta - \frac{1}{2} g t_{\text{vuelo}}^2 \quad (4.109)$$

$$t_{\text{vuelo}} = \sqrt{\frac{2d \sin \theta}{g}} \quad (4.110)$$

y por consiguiente, el alcance en x es

$$\begin{aligned}
 x &= v_{0x} t_{\text{vuelo}} \\
 &= v_f t_{\text{vuelo}} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{2dm_2g \sin \theta}{m_1 + m_2}\right) \left(\frac{2d \sin \theta}{g}\right)} \\
 &= 2d \sin \theta \sqrt{\frac{m_2}{m_1 + m_2}}, \tag{4.111}
 \end{aligned}$$

4) La condición implica que

$$\begin{aligned}
 d \cos \theta &= x \\
 &= 2d \sin \theta \sqrt{\frac{m_2}{m_1 + m_2}}, \tag{4.112}
 \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_2}} &= 2 \tan \theta \\
 \frac{m_1 + m_2}{m_2} &= 4 \tan^2 \theta \\
 \frac{m_1}{m_2} &= 4 \tan^2 \theta - 1. \tag{4.113}
 \end{aligned}$$

Ejercicio

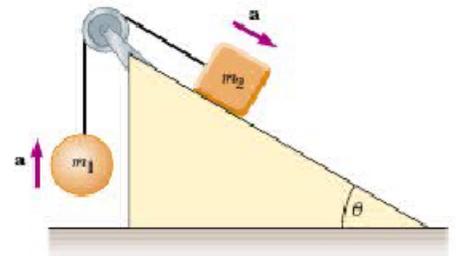
Calcule la aceleración con la que cae el bloque 2 para un determinado valor de la fuerza aplicada F .

Ejercicio 4.7.5. Un bloque de masa m_1 está unido a una masa m_2 por medio de una cuerda inextensible, como lo indica la figura. Desprecie la fricción entre el bloque y el plano inclinado. El ángulo de inclinación del plano es θ con respecto a la horizontal. Suponga que la polea es ideal.

1. Dibujar todas las fuerzas que actúan sobre m_1 y m_2 .
2. Escoja el sistema de referencia que considere adecuado para cada una de las masas y escriba las ecuaciones de movimiento, tanto para m_1 , como para m_2 .
3. Calcular la aceleración de las masas y la tensión en la cuerda en términos de m_1 , m_2 , g y θ .
4. Finalmente use la calculadora y calcule los valores numéricos si $m_2 = 5 \text{ kg}$, $m_1 = 2 \text{ kg}$, y $\theta = 30^\circ$.

Respuestas:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{g}{(m_1 + m_2)} [m_2(-\mu \cos \theta + \sin \theta) - m_1] \\
 T &= g \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} [1 - \mu \cos \theta + \sin \theta]
 \end{aligned}$$



Capítulo 5

Momentum

5.1. Dinámica de un sistema de partículas

Considere un sistema de N partículas interactuantes con masas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_N$. La posición de la i -sima partícula es \mathbf{r}_i , y la fuerza sobre esta es \mathbf{F}_i . La ecuación de movimiento de la i -sima partícula es

$$\mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \quad (5.1)$$

Las fuerza sobre la partícula i puede desdoblarse en dos términos

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\text{int}} + \mathbf{F}_i^{\text{ext}}. \quad (5.2)$$

Aquí $\mathbf{F}_i^{\text{int}}$, la fuerza *interna* sobre la partícula i , es la fuerza debida a todas las partículas dentro del sistema, y $\mathbf{F}_i^{\text{ext}}$, la fuerza *externa* sobre la partícula i , es decir la fuerza debida a fuentes externas al sistema. La ecuación de movimiento es entonces

$$\mathbf{F}_i^{\text{int}} + \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}. \quad (5.3)$$

El resultado de sumar todas las ecuaciones de movimiento para cada una de las partículas es entonces

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{int}} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}. \quad (5.4)$$

El segundo término corresponde a todas las fuerzas externas actuando sobre todas las partículas. Ésta es la fuerza externa total, \mathbf{F}_{ext} , actuando sobre el sistema

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{ext}}. \quad (5.5)$$

El primer término en la ec. (5.4), es la suma de todas las fuerzas internas actuando sobre todas las partículas. De acuerdo a la tercera ley de Newton, las fuerzas entre cualquier par de partículas son

iguales y opuestas de modo que su suma es cero. Se sigue que la suma de las fuerzas entre todas las partículas también es cero, de modo que las fuerzas internas se cancelan a pares. De aquí

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{\text{int}} = 0. \quad (5.6)$$

La ec. (5.4) se simplifica a

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{ext}} &= \sum_{i=1}^N \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \\ \mathbf{F}_{\text{ext}} &= \frac{d}{dt} \mathbf{P}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i, \quad (5.8)$$

es el momento total del sistema. De modo que la fuerza externa aplicada a un sistema es igual a la tasa de cambio del momento total del sistema. Esto es cierto independiente de los detalles de la interacción. \mathbf{F}_{ext} podría ser una sola fuerza actuando en una sola partícula, o podría ser la resultante de muchas interacciones involucrando cada una de las partículas del sistema.

En adelante omitiremos el subíndice ext de la ec. (5.7), de modo que

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}. \quad (5.9)$$

El resultado es idéntico a la ecuación de movimiento para una sola partícula, aunque de hecho se refiere a un sistema de partículas.

5.2. Centro de masa

Sea un conjunto de partículas con cantidades de movimientos diferentes formando un sistema que ocupa una región del espacio. En un instante en particular el sistema se vería como el que se ilustra en la figura ??

Si consideremos el sistema en su totalidad con una masa

$$M = \sum_{i=1}^N m_i, \quad (5.10)$$

podemos intentar escribir la ecuación de movimiento en la forma especial de masa constante

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \frac{d\mathbf{P}}{dt} \\
 \mathbf{F} &= \sum_{i=1}^N \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \\
 \mathbf{F} &= \sum_{i=1}^N \frac{d(m_i \mathbf{v}_i)}{dt} \\
 \mathbf{F} &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \\
 \mathbf{F} &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\dot{\mathbf{r}}_i}{dt}, \tag{5.11}
 \end{aligned}$$

que podemos escribir en la forma

$$\mathbf{F} = M\ddot{\mathbf{R}}, \tag{5.12}$$

si

$$\begin{aligned}
 M\ddot{\mathbf{R}} &= \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \\
 &= \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i, \tag{5.13}
 \end{aligned}$$

con \mathbf{r}_i el vector de posición de cada una de las partículas con respecto a un sistema de coordenadas. Entonces

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i. \tag{5.14}$$

Integrando formalmente dos veces

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\dot{\mathbf{R}}} d(\dot{\mathbf{R}}) &= \int_0^{\dot{\mathbf{r}}_i} \left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i d(\dot{\mathbf{r}}_i) \right] \\
 &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \int_0^{\dot{\mathbf{r}}_i} d(\dot{\mathbf{r}}_i) \\
 \dot{\mathbf{R}} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i, \\
 \int_0^{\mathbf{R}} d(\mathbf{R}) &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \int_0^{\mathbf{r}_i} d(\mathbf{r}_i) \\
 \mathbf{R} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i. \tag{5.15}
 \end{aligned}$$

Definido de esta forma \mathbf{R} es un vector desde el origen de coordenadas a un punto llamado el *centro de masa* del sistema, como se ilustra en la figura ?? . El sistema se comporta como si toda la masa está concentrada en el centro de masa y todas las fuerzas externas actuaran sobre ese punto.

Muchas veces estamos interesados en el movimiento de cuerpos relativamente rígidos como pelotas o automóviles. Cuerpos de esta índole, corresponden a sistemas de partículas que están fijas entre sí por fuertes fuerzas internas. La ec. (5.14) muestra que con respecto a fuerzas externas, el cuerpo se comporta como si fuera una partícula virtual. En el capítulo 4, casualmente tratamos cada cuerpo como si fuesen partículas; vemos ahora que esto está justificado con tal que centremos nuestra atención en el movimiento del centro de masa.

La ecuación (5.12) es solo válida para estudiar la traslación del centro de masa. En ausencia de fuerzas externas, la aceleración del centro de masa es cero, de modo que $\ddot{\mathbf{R}} = 0$, es decir, el centro de masa se mueve a velocidad constante. Esta ley de conservación proviene de la invarianza de los sistemas bajo transformaciones de Galileo

Ilustración del movimiento de centro de masa: <http://www.wired.com/wiredscience/2011/09/modeling-a-falling-slinky/>. Simulación y código [con una pelota de tenis en el exterior](#)

Ejemplo 5.2.1. Calcule el centro de masa de un par de esferas de masa m_1 y m_2 unidas por una varilla de masa despreciable como se muestra en la figura ?? . Ver

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (5.16)$$

Note que la línea que une los extremos de los vectores de posición \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 corresponde a la diferencia $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Para comprobar que \mathbf{R} se encuentra sobre esa línea, sea el desplazamiento desde la punta de \mathbf{R} hasta la punta \mathbf{r}_1 el vector \mathbf{r}'_1 como se muestra en la figura ?? . De la misma forma, sea \mathbf{r}'_2 el vector de desplazamiento entre los extremos de \mathbf{R} y \mathbf{r}_2 . Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_1 &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} \\ \mathbf{r}'_2 &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Esto es equivalente a considerar un sistema de referencia con el origen el centro de masa del sistema.

De la ec. (6.109)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_1 &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} \\ &= \mathbf{r}_1 - \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{\mathbf{r}_1(m_1 + m_2) - m_1 \mathbf{r}_1 - m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \end{aligned} \quad (5.18)$$

de modo que el vector \mathbf{r}'_1 es paralelo a la varilla que une las dos esferas determinada por $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Similarmente

$$\mathbf{r}'_2 = - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (5.19)$$

De modo que tanto \mathbf{r}'_1 como \mathbf{r}'_2 yacen sobre la línea que une m_1 y m_2 . Además, si la longitud de dicha línea es l

$$\begin{aligned} r'_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \\ r'_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} l. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Consideremos ahora el movimiento del par de esferas después de ser lanzadas con algún ángulo de lanzamiento. Asumiendo que la fricción es despreciable, la fuerza externa sobre el cuerpo cuando es lanzado al aire es

$$\mathbf{F} = m_1 \mathbf{g} + m_2 \mathbf{g}, \quad (5.21)$$

donde

$$\mathbf{g} = -g \hat{\mathbf{j}}. \quad (5.22)$$

La ecuación de movimiento para el centro de masa es:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= m_1 \frac{d\dot{\mathbf{r}}_1}{dt} + m_2 \frac{d\dot{\mathbf{r}}_2}{dt} \\ &= m_1 (\ddot{\mathbf{r}}'_1 + \ddot{\mathbf{R}}) + m_2 (\ddot{\mathbf{r}}'_2 + \ddot{\mathbf{R}}) \\ &= (m_1 + m_2) \ddot{\mathbf{R}} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ &= (m_1 + m_2) \ddot{\mathbf{R}} \end{aligned}$$

de modo que

$$(m_1 + m_2) \ddot{\mathbf{R}} = (m_1 + m_2) \mathbf{g}, \quad (5.23)$$

o

$$\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{g}. \quad (5.24)$$

El centro de masa sigue la trayectoria parabólica de una sola masa. ■

5.2.1. Centro de masa de un sistema continuo

Podemos visualizar un cuerpo continuo como formado por cubos de volumen $\Delta V_i = dx_i dy_i dz_i$ y con centro en $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, cada cubo tiene una masa dada por $\rho_i \Delta V_i$, donde $\rho_i = \rho(x_i, y_i, z_i)$ es la densidad de masa del cubo de volumen ΔV_i . El centro de masa es entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{1}{M} \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \rho_i \Delta V_i \\ &= \frac{1}{M} \int_V \mathbf{r} \rho dV, \end{aligned} \quad (5.25)$$

definiendo el diferencial de masa $dm = \rho dV$, tenemos

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} dm. \quad (5.26)$$

Para visualizar esta integral, piense en dm como la masa de un elemento de volumen dV localizada en la posición \mathbf{r} , como se muestra en la figura ???. Si la densidad de masa del elemento es ρ , entonces $dm = \rho dV$, y

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \int_V \mathbf{r} \rho dV, \quad (5.27)$$

donde

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}. \quad (5.28)$$

La integral en (5.27), es llamada una integral de volumen.

Ejemplo 5.2.2. Centro de masa de una varilla no uniforme. Calcular el centro de masa de una varilla de densidad lineal $\lambda = \lambda_0(x/L)$, donde L es la longitud de la varilla

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \lambda dx. \quad (5.29)$$

Solución

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (x, 0, 0) \\ \mathbf{R} &= (R_x, 0, 0), \end{aligned} \quad (5.30)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} R_x &= \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda(x) dx \\ &= \frac{1}{M} \frac{\lambda_0}{L} \int_0^L x^2 dx. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Debemos calcular M :

$$M = \int dm = \frac{\lambda_0}{L} \int_0^L x dx = \frac{\lambda_0}{L} \frac{x^2}{2} \Big|_0^L = \frac{\lambda_0}{2} L. \quad (5.32)$$

Reemplazando en (5.31)

$$\begin{aligned} R_x &= \frac{2}{\lambda_0 L} \frac{\lambda_0}{L} \int_0^L x^2 dx \\ &= \frac{2}{L^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^L \\ &= \frac{2}{L^2} \frac{L^3}{3} \\ &= \frac{2}{3} L. \end{aligned} \quad (5.33)$$

■

5.3. Conservación del momentum

Para un sistema aislado, es decir, un sistema que no interactúa con sus alrededores se tiene que $\mathbf{F} = 0$, y por lo tanto

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0. \quad (5.34)$$

De modo que el momentum total es constante, sin importar que tan fuerte son las interacciones internas, y sin importar lo complicado del movimiento. Esta es la ley de conservación del momentum.

Ejemplo 5.3.1. Retroceso de un cañón de resorte. Un cañón de resorte cargado, inicialmente en reposo en una superficie horizontal sin fricción, dispara una canica con un ángulo de elevación θ . La masa del cañón es M , la masa de la canica es m , y la velocidad de salida de la canica es v_0 relativa al cañón. ¿Cual es la velocidad final del cañón?

Considere el sistema como compuesto por el cañón más la canica. Como la gravedad y la fuerza son verticales no existen fuerzas horizontales en la dirección x , de modo que

$$\frac{dP_x}{dt} = 0, . \quad (5.35)$$

Como P_x se conserva:

$$P_{x,\text{inicial}} = P_{x,\text{final}} \quad (5.36)$$

Sea el tiempo inicial anterior a disparar el cañón. Entonces $P_{x,\text{inicial}} = 0$, ya que el sistema está inicialmente en reposo. Después de que la canica ha abandonado la boca del cañón, el cañón retrocede con alguna rapidez V_f , y su momentum final es MV_f hacia la izquierda. La velocidad de la canica relativa a la mesa es $v_0 \cos \theta - V_f$. Por conservación del momentum horizontal, tenemos por consiguiente que

$$0 = m(v_0 \cos \theta - V_f) - MV_f, \quad (5.37)$$

o

$$V_f = \frac{mv_0 \cos \theta}{M + m}. \quad (5.38)$$

■

5.4. Sistemas de masa variable

Para este tipo de sistemas se debe usar

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}. \quad (5.39)$$

Para analizar este tipo de sistemas es esencial tratar con el mismo conjunto de partículas a través de todo el intervalo temporal desde el tiempo inicial al tiempo final; debemos rastrear todas las partículas que estaban originalmente en el sistema. Consecuentemente, la masa del sistema no puede

cambiar durante el intervalo de interés. En el caso de un cohete, el sistema está compuesto por el cohete en sí, y el combustible que tenga al momento inicial.

Considere un cohete a un tiempo t que se mueve a velocidad \mathbf{v} . Entre un tiempo t y $t + \Delta t$, una masa de combustible Δm es quemada y expulsada como gas a una velocidad \mathbf{u} relativa al cohete.

El sistema consiste de Δm más la masa remanente del cohete M . De aquí que la masa total es $M + \Delta m$. Como se muestra en la figura ??

La velocidad del cohete al tiempo t es $\mathbf{v}(t)$, y en $t + \Delta t$, es $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$. Similarmente, la velocidad de la masa de combustible al tiempo t es $\mathbf{v}(t)$, y al tiempo $t + \Delta t$, es la velocidad del cohete a ese tiempo, más la suma vectorial de su propia velocidad: $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v} + \mathbf{u}$, donde hemos tenido en cuenta que la dirección del vector \mathbf{u} es arbitraria.

El momentum inicial es:

$$\mathbf{P}(t) = (M + \Delta m)\mathbf{v}, \quad (5.40)$$

y el momentum final es

$$\mathbf{P}(t + \Delta t) = M(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) + \Delta m(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v} + \mathbf{u}). \quad (5.41)$$

El cambio en el momentum es

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{P} &= \mathbf{P}(t + \Delta t) - \mathbf{P}(t) \\ &= M\Delta\mathbf{v} + (\Delta m)(\Delta\mathbf{v}) + (\Delta m)\mathbf{u} \\ &\approx M\Delta\mathbf{v} + (\Delta m)\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

donde hemos despreciado el producto de términos pequeños. Por consiguiente

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t} \\ &= M\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{u}\frac{dm}{dt}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

dm/dt es la tasa de cambio de la masa expulsada. Ya que esta masa proviene del cohete

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{dM}{dt}, \quad (5.44)$$

y

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{u}\frac{dM}{dt}. \quad (5.45)$$

como

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}, \quad (5.46)$$

entonces

5.4.1. Cohete en el espacio libre

En el espacio exterior en ausencia de gravedad no hay fuerzas externas actuando sobre el cohete, de modo que $\mathbf{F} = 0$ y la ecuación de movimiento (??) esta dada por

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = 0 \implies M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u} \frac{dM}{dt}, \quad (5.47)$$

Definimos la fuerza de empuje del cohete como

$$\mathbf{F}_E = M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u} \frac{dM}{dt}. \quad (5.48)$$

La ec. (??) puede reescribirse como

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u} \frac{1}{M} \frac{dM}{dt}. \quad (5.49)$$

Generalmente la velocidad de expulsión \mathbf{u} es constante, en tal caso es fácil integrar la ecuación de movimiento:

$$d\mathbf{v} = \mathbf{u} \frac{dM}{M}. \quad (5.50)$$

La antiderivada de $1/x$ es $\ln x$, ya que

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}, \quad (5.51)$$

Asumiendo que \mathbf{u} es constante en magnitud y dirección, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{v}_0}^{\mathbf{v}_f} d\mathbf{v} &= \mathbf{u} \int_{M_0}^{M_f} \frac{dM}{M} \\ \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_0 &= \mathbf{u} \ln M \Big|_{M_0}^{M_f} \\ &= \mathbf{u} (\ln M_f - \ln M_0) \\ &= \mathbf{u} \ln \frac{M_f}{M_0} \\ &= - \mathbf{u} \ln \frac{M_0}{M_f}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Si $\mathbf{v}_0 = 0$, entonces

$$\mathbf{v}_f = - \mathbf{u} \ln \frac{M_0}{M_f}. \quad (5.53)$$

La velocidad final es independiente de como la masa es liberada. Las únicas cantidades importante son las velocidades de expulsión y el cociente entre las masas finales e iniciales.

Ejemplo 5.4.1. Del enunciado del problema se puede inferir que

$$\frac{dM}{dt} = -10 \frac{\text{Kg}}{\text{s}}, \quad (5.54)$$

donde el signo menos indica que la masa total del sistema cohete-combustible esta disminuyendo con el tiempo. Integrando entre un tiempo $t_i = 0$ y un tiempo final t , tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^t dM &= -10 \int_0^t \\ M(t) &= -M(0) - 10t \end{aligned} \quad (5.55)$$

Usando el valor para la masa inicial $M(0) = 1\,000$ kg, tenemos

$$\begin{aligned} M(t) &= (1000 - 10t)\text{kg} \\ \frac{dM(t)}{dt} &= -10\text{kg s}^{-1} \end{aligned}$$

Usando la ec. (5.48) podemos calcular el empuje del cohete:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_E &= \mathbf{u} \frac{dM}{dt} = \mathbf{u}(-10) \\ &= (-500) \times (-10)\hat{\mathbf{i}} \\ &= 5\,000 \text{ N } \hat{\mathbf{i}}, \end{aligned} \quad (5.56)$$

y el empuje producido por el cohete es de 5 000 N,
y la aceleración

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{\mathbf{F}_E}{M(t)} \\ &= \frac{5000}{1000 - 10t} \text{m s}^{-2} \hat{\mathbf{i}} \\ &= \frac{500}{100 - t} \text{m s}^{-2} \hat{\mathbf{i}} \end{aligned} \quad (5.57)$$

de modo que

$$\mathbf{v} = [-500 \ln(-100 + t)] \text{m s}^{-1} \hat{\mathbf{i}} \quad (5.58)$$

$$\mathbf{x} = \{-500[-t + t \ln(t - 100) - 100 \ln(100 - t)]\} \text{m } \hat{\mathbf{i}} \quad (5.59)$$

Si el cohete está en presencia de un campo gravitacional constante (cerca a la superficie de la tierra), la fuerza externa es

$$\mathbf{F} = M\mathbf{g} \quad (5.60)$$

y de (??)

$$M\mathbf{g} = M\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{u}\frac{dM}{dt}, \quad (5.61)$$

de donde

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{u}}{M}\frac{dM}{dt} + \mathbf{g}. \quad (5.62)$$

Integrando como en la ec. (5.49)

$$\int_{\mathbf{v}_0}^{\mathbf{v}_f} d\mathbf{v} = -\mathbf{u}\ln\frac{M_0}{M_f} + \mathbf{g}(t_f - t_0) \quad (5.63)$$

5.5. Impulso

Con esta definición del impulso podemos establecer el Principio de Moméntum en las siguientes palabras:

durante un intervalo suficientemente pequeño $\Delta t = t_b - t_a$, tenemos

$$\mathbf{I} = \mathbf{F}\Delta t = \mathbf{P}(t_b) - \mathbf{P}(t_a). \quad (5.64)$$

5.5.1. Transporte de momomentum

El empuje de un chorro de agua proviene del moméntum que transfiere, por ejemplo sobre una pared. ¿Cómo puede una columna de agua transmitir una fuerza tan real como la de una varilla de hierro?. La razón es fácil de ver si nos imaginamos el chorro de agua como una serie de pequeñas gotas de masa uniforme m , viajando a una velocidad v .

Considere entonces, un chorro de partículas de masa m y separación l que golpean perpendicularmente una superficie con rapidez v , como se ilustra en la figura ???. El chorro rebota sobre la misma línea original de movimiento con rapidez v' . La masa por unidad de longitud del chorro incidente es $\lambda = m/l$.

Para encontrar el impulso de una gota rebotando con rapidez v' sobre la pared, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F} dt &\approx \mathbf{F}_{\text{prom}}\Delta t = \Delta\mathbf{p} \\ &= m(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) \\ &= m[v'\hat{\mathbf{i}} - v(-\hat{\mathbf{i}})] \\ &= m(v' + v)\hat{\mathbf{i}}. \end{aligned}$$

es el impulso sobre la pared durante el intervalo Δt . Si escogemos el intervalo Δt , tal que la gota recorra una distancia l , entonces

$$\Delta t = \frac{l}{v}$$

y

$$F_{\text{prom}} \frac{l}{v} = m(v + v'),$$

y despejando la fuerza promedio de las gotas sobre la pared, tenemos

$$\begin{aligned} F_{\text{prom}} &= \frac{m}{l} v(v + v') \\ &= \frac{m}{l} v(v + v') \\ &= \lambda(v + v') \end{aligned}$$

Si el chorro colisiona sin rebotar, entonces $v' = 0$, y

$$F = \lambda v^2.$$

mientras que si rebotan $v' = v$

$$F = 2\lambda v^2,$$

de nuevo el efecto karate.

Capítulo 6

Trabajo y Energía

Hasta ahora hemos explotado la homogeneidad del espacio que da lugar a la conservación de las tres componentes de la cantidad de movimiento. En este capítulo ilustraremos de nuevo el Teorema de Noether mostrando que la cantidad conservada asociada a la homogeneidad del tiempo es la *Energía*.

La homogeneidad de las ecuaciones de movimiento con respecto al tiempo queda manifiesta cuando éstas se reescriben de una forma independiente del tiempo.

En el caso de caída libre integramos la ecuación de movimiento para una fuerza constante $\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{j}}$:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g, \quad (6.1)$$

para encontrar la velocidad y la posición en función del tiempo. A partir de dichas ecuaciones encontramos la ecuación de la trayectoria (4.38)

$$v^2 - v_0^2 = -2g(y - y_0). \quad (6.2)$$

En general, es posible integrar directamente la ecuación de movimiento para obtener la ecuación de la trayectoria si consideramos la fuerza dependiendo de la posición en lugar del tiempo.

Para analizar la trayectoria de un movimiento bajo una fuerza arbitraria debemos mirar como cambia su vector de velocidad, o equivalentemente su vector de desplazamiento $\Delta\mathbf{r}$. El v^2 provendrá del producto escalar $\mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}$, donde

$$\mathbf{F}\Delta t \approx \Delta\mathbf{p}. \quad (6.3)$$

6.1. Movimiento en una dimensión

En el caso de masa constante, podemos escribir la ecuación de movimiento en una dimensión como

$$\begin{aligned} F &= ma \\ F &= m \frac{dv}{dt} \\ F dx &= m \frac{dv}{dt} dx = m \frac{dv}{dt} \frac{dx}{dt} dt = mv \frac{dv}{dt} dt \\ F dx &= mv dv, \end{aligned}$$

e integrando directamente con respecto en la dirección de movimiento, asumiendo que ésta es a lo largo de x , tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^x F dx &= m \int_{v_0}^v v dv \\ &= \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2)\end{aligned}\quad (6.4)$$

Para el caso de $F = -mg$ y la dirección en y , la ecuación general de la trayectoria para un sistema de masa constante (6.4) da lugar inmediatamente a la ec. (6.2).

6.2. Integral de línea

A modo de teorema establecemos que la ecuación de la trayectoria para una partícula de masa constante, se puede determinar de la ecuación de movimiento en tres dimensiones

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

cuando se realiza la *integral de línea* a lo largo de la curva continua C que sigue la partícula:

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = m \int_C \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} \quad (6.5)$$

donde la integral de línea se puede evaluar si conocemos como cambia el argumento, \mathbf{r} , de una función vectorial \mathbf{G} , en términos de algún parámetro t :

$$\int_C \mathbf{G}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{G}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} dt. \quad (6.6)$$

donde \mathbf{r} es el vector de posición desde un origen de coordenadas a cada uno de los segmento $d\mathbf{r}$ tangenciales a la trayectoria C , tal que $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}(t_a)$ y \mathbf{r}_b corresponden a las posiciones de los extremos de C . Aquí $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ es una función vectorial general. Para visualizar la integral de línea, se divide la trayectoria desde la posición inicial \mathbf{r}_a hasta la posición final \mathbf{r}_b en N segmentos cortos de longitud $\Delta\mathbf{r}_j$, donde j es un índice que numera los segmentos. Ver fig ??.

Si $\Delta\mathbf{r}_j$ es suficientemente pequeño, el integrando del lado derecho de la ec. (6.5) puede escribirse como

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_j) \cdot \Delta\mathbf{r}_j \quad (6.7)$$

Si Δt es el tiempo que se tarda en atravesar un segmento, entonces

$$\Delta\mathbf{r}_j = \mathbf{r}(t_j + \Delta t) - \mathbf{r}(t_j) = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \Delta t, \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \mathbf{F}(\mathbf{r}_j) \cdot \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \Delta t \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} dt.\end{aligned}\quad (6.9)$$

6.3. Ecuación de la trayectoria

Aplicando el concepto de integral de línea a la ecuación de movimiento con masa constante

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r}) &= m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= m \int_C \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} \\ \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt &= m \int_{t_a}^{t_b} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt.\end{aligned}\quad (6.10)$$

Analicemos primero el caso del movimiento bajo una fuerza $F(x)$ en una dimensión. La ec. (6.10) queda

$$\begin{aligned}\int_{t_a}^{t_b} F(x) \frac{dx}{dt} dt &= m \int_{t_a}^{t_b} \frac{dv}{dt} \frac{dx}{dt} dt \\ &= m \int_{t_a}^{t_b} \frac{dv}{dt} v dt \\ &= m \int_{t_a}^{t_b} v \frac{dv}{dt} dt.\end{aligned}\quad (6.11)$$

Realizando el cambio de variables

$$\begin{array}{ll} t \rightarrow x(t) & t \rightarrow v(t) \\ t_a \rightarrow x(t_a) = x_a & t_a \rightarrow v(t_a) = v_a \\ t_b \rightarrow x(t_b) = x_b & t_b \rightarrow v(t_b) = v_b \\ \frac{dx}{dt} dt \rightarrow dx & \frac{dv}{dt} dt \rightarrow dv,\end{array}\quad (6.12)$$

y reemplazando en (6.11)

$$\begin{aligned}\int_{x_a}^{x_b} F dx &= m \int_{v_a}^{v_b} v dv \\ &= \frac{1}{2} m v^2 \Big|_{v_a}^{v_b} \\ &= \frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2.\end{aligned}\quad (6.13)$$

Definimos:

$$\begin{aligned}K &\equiv \frac{1}{2} m v^2 \\ W_{ab} &\equiv \int_{x_a}^{x_b} F(x) dx,\end{aligned}\quad (6.14)$$

donde K es la *energía cinética*, y W_{ab} es el *trabajo* hecho por la fuerza F sobre la partícula a medida que ésta se mueve de a a b . Entonces la ec. (6.13) queda

$$W_{ba} = K_b - K_a.\quad (6.15)$$

En el caso general de tres dimensiones, el lado derecho de la ec. (6.10) se puede evaluar directamente

$$\int_C \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \Delta t. \quad (6.16)$$

Para un segmento suficientemente corto, \mathbf{v} es aproximadamente constante. De aquí que $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{v} \Delta t$, por consiguiente

$$\begin{aligned} \int_C \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{t_a}^{t_b} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \right) dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v^2) dt. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Como la antiderivada de v^2 es justamente $d(v^2)/dt$, entonces

$$\begin{aligned} \int_C \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v^2) dt \\ &= \frac{1}{2} v^2 \Big|_{t_a}^{t_b} \\ &= \frac{1}{2} v(t_b)^2 - \frac{1}{2} v(t_a)^2 \\ &= \frac{1}{2} v_b^2 - \frac{1}{2} v_a^2. \end{aligned} \quad (6.18)$$

y reemplazando en la ecuación para la trayectoria (6.10)

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= m \int_C \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2. \end{aligned} \quad (6.19)$$

6.4. Teorema de Trabajo-Energía

El trabajo hecho por una fuerza \mathbf{F} sobre una partícula que se mueve de a hasta b , se define como

$$W_{ba} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (6.20)$$

La ecuación (6.19) toma ahora la forma

$$W_{ba} = K_b - K_a. \quad (6.21)$$

donde K es la energía cinética de la partícula de masa m y una rapidez v y esta dada por la ec. (6.14),

$$K = \frac{1}{2}mv^2.$$

Para un sistema extendido

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \frac{1}{2}MV_b^2 - \frac{1}{2}MV_a^2, \quad (6.22)$$

donde $d\mathbf{R} = \mathbf{V}dt$ es el desplazamiento del centro de masa en un tiempo t .

6.5. Cálculo del trabajo

En el caso de movimiento en una dimensión

$$\mathbf{F} = (F_x, 0, 0)$$

la integral de línea se reduce a una integral normal

$$\int_{1\text{-dim}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \int_{x_0}^x F_x(x) dx.$$

6.5.1. Fuerza gravitacional constante

de donde

$$v^2 - v_0^2 = -2g(y - y_0),$$

que corresponde a la ecuación de la trayectoria en la ecuación (6.2). De modo que la Segunda ley de Newton en la forma del Teorema de trabajo y energía sirve para obtener directamente la ecuación de la trayectoria.

Finalmente, podemos reescribir la ecuación (??) en la forma

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgy_0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgy. \quad (6.23)$$

6.5.2. Trabajo realizado por la fuerza de fricción

y

$$x = x_0 + \frac{v_0^2 - v^2}{2\mu g} \quad (6.24)$$

La principal diferencia entre los dos movimientos estudiados es que cuando la velocidad final es igual a cero, el movimiento bajo una fuerza gravitacional constante continua (con la velocidad en sentido opuesto), mientras que en el caso de fuerza de fricción el movimiento se detiene completamente. Definiendo la energía potencial como

$$U(y) = mgy,$$

y la energía mecánica como

$$E_{\text{mecánica}} = U(y) + \frac{1}{2}mv^2,$$

podríamos explicar porque aparece la diferencia. Si asumimos que la energía mecánica se conserva entonces la energía cinética se debe ir convirtiendo en energía potencial para poder mantener la energía mecánica constante. En el punto de máxima altura la energía mecánica es sólo energía potencial y al siguiente instante la energía potencial debe disminuir, es decir, el cuerpo debe comenzar a caer, para que la energía potencial puede comenzar a generar de nuevo energía cinética.

En el caso de la fuerza de fricción, la energía cinética es cero pero no se ha convertido en ninguna otra forma de energía mecánica. Si insistimos en la *conservación de energía*, entonces necesariamente la energía cinética se debe disipar en alguna otra forma de energía que no puede usarse para continuar el movimiento del bloque. Esta forma de energía se llama calor y se refleja en el calentamiento (aumento de temperatura) entre las superficies. Aceptando este postulado podríamos medir el calor en unidades de energía mecánica.

La unidad de trabajo y energía en el SI es el joule (J):

$$1 \text{ J} = 1 \text{ kgm}^2/\text{s}^2. \quad (6.25)$$

La unidad de trabajo y energía en el sistema cgs es el ergio (erg):

$$\begin{aligned} 1 \text{ erg} &= 1 \text{ gcm}^2/\text{s}^2 \\ &= 10^{-7} \text{ J}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Precisamente fue el físico Británico James Prescott Joule el primer en apreciar que el calor en si mismo representa una forma de energía. A través de una serie de experimentos meticulosos sobre le calentamiento del agua por una rueda de paletas movidas por un cuerpo cayendo, mostró que la perdida de la energía mecánica por fricción estaba acompañada por la aparición de una cantidad de energía equivalente por fricción. Joule concluyó que el calor es una forma de energía y que la suma de la energía mecánica y la energía calórica de un sistema es conservada.

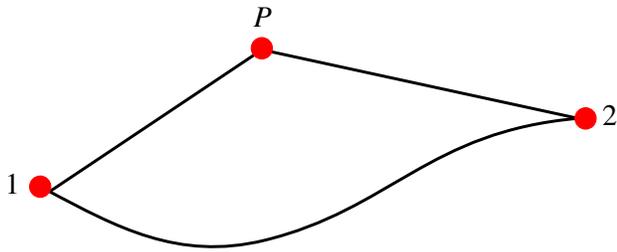
Otra diferencia importante entre los dos sistemas es que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional para el cambio de altura entre y_0 y y es independiente de si el movimiento es puramente vertical o parabólico. Sin embargo, para el cuerpo desplazándose sobre la misma distancia en x sobre una superficie con fricción pero siguiendo una trayectoria curva, la fuerza de fricción realiza un trabajo mayor y disipa más calor.

6.6. Fuerzas conservativas

En la naturaleza hay ciertas fuerzas, como la de la gravedad por ejemplo, que tienen una propiedad muy especial llamada *conservativa*. Si calculamos el trabajo hecho por una fuerza al mover un objeto de un punto a otro a lo largo de una trayectoria curvada, en general (como en el caso de la fuerza de fricción) el trabajo depende de la curva, pero en algunos casos especiales no. Si el trabajo no depende de la curva, decimos que la fuerza es conservativa. En otras palabras, si la integral de línea de la fuerza veces la distancia para ir de la posición 1 a 2 es calculada lo largo de una trayectoria A y entonces a lo largo de B y se obtiene lo mismo, y si es cierto para éste par de números a lo largo de *todas las curvas*, y si pasa sin importar el par de números que usemos, entonces decimos que la

fuerza es conservativa. En tales casos el trabajo se puede calcular de una manera simple, y podemos dar una fórmula para el resultado.

Sea el trabajo de ir de un punto P a otro punto del espacio: $-U(x, y, z)$, entonces si la fuerza es conservativa (manteniendo presente que tenemos integrales de línea)



$$\begin{aligned}
 \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_1^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_P^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= - \int_P^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_P^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= -(-U(x_1, y_1, z_1)) - U(x_2, y_2, z_2) \\
 &= U(x_1, y_1, z_1) - U(x_2, y_2, z_2) \\
 &= U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2). \tag{6.27}
 \end{aligned}$$

La cantidad $U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_2)$ es llamada el cambio en *energía potencial*, y llamaremos U la energía potencial.

Para el caso de fuerzas conservativas, la ec. (6.21) queda

$$\begin{aligned}
 U(\mathbf{r}_a) - U(\mathbf{r}_b) &= K_b - K_a \\
 K_a + U(\mathbf{r}_a) &= K_b + U(\mathbf{r}_b), \tag{6.28}
 \end{aligned}$$

Como esto se mantiene para cualquier par de puntos \mathbf{r}_a y \mathbf{r}_b , entonces

$$E \equiv K + U = \text{constante.} \tag{6.29}$$

La constante E es llamada la *energía mecánica* de la partícula, o de forma menos precisa, la energía total de la partícula.

La Ley de Conservación de la Energía Mecánica es una consecuencia de la homogeneidad del tiempo.

Supongamos que tenemos un sistema unidimensional, en el cual la fuerza $F(x)$ es conservativa, de modo que la diferencia de energía potencial es

$$\begin{aligned}
 U_b - U_a &= - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= - \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \\
 &= - \int_{t_a}^{t_b} F \frac{dx}{dt} dt \\
 &= - \int_{x_a}^{x_b} F dx. \tag{6.30}
 \end{aligned}$$

Consideremos el cambio en la energía potencial ΔU a medida que la partícula se mueve desde algún

punto x a $x + \Delta x$

$$\begin{aligned}
 U(x + \Delta x) - U(x) &\equiv \Delta U \\
 &= - \int_x^{x+\Delta x} F(x) dx \\
 &\approx - F(x) \int_x^{x+\Delta x} dx \\
 &= - F(x)(x + \Delta x - x) \\
 &= - F(x)\Delta x,
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

o

$$F(x) \approx - \frac{\Delta U}{\Delta x} \tag{6.32}$$

en el límite $\Delta x \rightarrow 0$ estaríamos tentados a escribir dU/dx , sin embargo es más conveniente hacer explícito que la variación es sólo sobre x usando la notación

$$F(x) = - \frac{\partial U}{\partial x} \tag{6.33}$$

definida como la derivada parcial por los matemáticos. Note entonces que en el caso unidimensional la energía potencial es justamente la antiderivada de $F(x)$

En el caso de una fuerza conservativa en tres dimensiones siempre podemos escoger una trayectoria para ir del punto 1 al punto 2 de tal forma que se mantengan dos de las direcciones constantes. A lo largo de cada dirección podemos aplicar el método anterior variando U sólo en la dirección relevante. Por ejemplo, para una fuerza en tres dimensiones

$$\mathbf{F} = F_x \hat{\mathbf{i}} + F_y \hat{\mathbf{j}} + F_z \hat{\mathbf{k}}, \tag{6.34}$$

si escogemos una trayectoria a lo largo de x llegaríamos al resultado

$$\begin{aligned}
 F_x &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x} \\
 &= - \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{yz}.
 \end{aligned} \tag{6.35}$$

donde la parte de “ $|_{yz}$ ” hace explícito que la variación se hace manteniendo las direcciones y y z constantes. En adelante usaremos la notación de derivadas parciales sin explicitar la variables que se dejan constantes pues se sobreentiende del contexto.

Por un método completamente análogo para las otras direcciones, se llega al sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}
 F_x &= - \frac{\partial U}{\partial x} \\
 F_y &= - \frac{\partial U}{\partial y} \\
 F_z &= - \frac{\partial U}{\partial z}.
 \end{aligned} \tag{6.36}$$

O en notación vectorial

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= F_x \hat{\mathbf{i}} + F_y \hat{\mathbf{j}} + F_z \hat{\mathbf{k}} = - \left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial U}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \\ &= - \left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right) U \\ \mathbf{F} &\equiv - \nabla U.\end{aligned}\tag{6.37}$$

El operador

$$\nabla \equiv \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z}\tag{6.38}$$

se llama *gradiente* y convierte una función escalar de varias variables en una función vectorial. De éste modo para un campo conservativo, la integral de línea entre a y b se puede evaluar dando como resultado:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}_a) - U(\mathbf{r}_b)\tag{6.39}$$

Generalizando el caso de la integración normal en una variable, $-U(\mathbf{r})$ se podría ver como el “anti-gradiente” de \mathbf{F} . El concepto de fuerza conservativa tiene su contraparte matemática para establecer teoremas de integrabilidad de funciones de varias variables. Para las fuerzas conservativas el campo generado por el vector de fuerza se puede conocer a partir del *gradiente* de variaciones de una función escalar llamada el potencial.

6.7. Conservación de la energía

Las fuerzas fundamentales, o más estrictamente, las interacciones fundamentales conocidas en la naturaleza, son todas conservativas. Como consecuencia, la energía total de un sistema de partículas se debe conservar. Estas interacciones fundamentales pueden generar algunas fuerzas remanentes como la fricción que aparentemente es no conservativa: el trabajo para arrastrar un objeto entre un par de puntos por diferentes caminos con fricción, depende de la trayectoria que se siga el objeto. Sin embargo, la fricción es una herramienta para parametrizar detalles de las interacciones interatómicas las cuales si son conservativas. La energía cinética y los diferentes potenciales interatómicos cambian con el movimiento de un cuerpo sobre una superficie con fricción. Estos procesos se reflejan en el calor disipado por el cuerpo mientras se mueve sobre la superficie. En términos modernos la temperatura de un material es una consecuencia de la energía cinética y potencial de sus componentes. Si tenemos en cuenta la energía mecánica del sistema y las pérdidas por calor, la energía total del sistema se debe conservar, aunque en la practica resulte extremadamente complicado calcular el calor generado por las interacciones conservativas entre los átomos y moléculas del sistema.

Como dijimos antes, Joule fue el primer en apreciar que el calor en si mismo representa una forma de energía. En nuestros días tenemos un conocimiento más detallado de la energía calórica que la que tenía Joule. Sabemos que los sólidos están compuestos por átomos mantenidos juntos por fuertes interacciones interatómicas. Cada átomo puede oscilar sobre su posición de equilibrio y tiene una energía mecánica en forma de energías cinéticas y potenciales provenientes de interacciones conservativas. A medida que el sólido se calienta, la amplitud de las oscilaciones se incrementa y la energía promedio de cada átomo se vuelve mayor. La energía calórica de un sólido es la energía mecánica de las vibraciones aleatorias de los átomos.

6.8. Ejemplos de energía potencial

6.8.1. Energía potencial de un campo de fuerza uniforme

$$U(h) = mgh, \quad (6.40)$$

donde h es la altura desde el suelo.

Ejemplo: Caída libre

Si $\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{j}}$, $d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{j}}dy$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 &= \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= -mg \int_{y_a}^{y_b} dy \\ \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 &= -gm(y_b - y_a). \end{aligned} \quad (6.41)$$

De esta forma hemos obtenido directamente la ecuación de la trayectoria para caída libre (6.2)

$$\frac{1}{2}v_b^2 - \frac{1}{2}v_a^2 = -g(y_b - y_a). \quad (6.42)$$

En términos de conservación de la energía mecánica, la ec (6.41) también puede escribirse como:

$$\frac{1}{2}v_a^2 + mgy_a = \frac{1}{2}mv_b^2 + mgy_b \quad (6.43)$$

Para encontrar la altura máxima de un cuerpo lanzado horizontalmente hacia arriba desde la superficie de la tierra, con rapidez inicial v_0 , igualamos la energía cinética inicial con la energía potencial final:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgy_{\max}, \quad (6.44)$$

de donde

$$y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (6.45)$$

Ejemplo 6.8.1. Un cuerpo de masa m_2 se desliza desde el reposo sobre una mesa sin fricción debido al peso de un bloque de masa $m_1 > m_2$ que cae desde una altura y_0 y con el cual está conectado a través de una polea ideal. Ver figura ??

La conservación de energía se aplica al sistema completo:

$$\text{Energía mecánica inicial de los dos bloques} = \text{Energía mecánica final de los dos bloques} \quad (6.46)$$

Como los dos bloques se mueven con la misma rapidez v , y asumiendo sin pérdida de generalidad que la altura final del bloque 1 es cero, tenemos (asumiendo que la altura de la mesa es h)

que coincide con el resultado expresado en la ecuación (??) cuando $\mu = 0$.

Usando directamente las leyes de Newton, como hicimos en los problemas resueltos del capítulo de dinámica

$$\begin{aligned} T &= m_2 a \\ m_1 g - T &= m_1 a, \end{aligned} \quad (6.47)$$

donde T es la tensión de la cuerda.

6.9. Fuerzas no conservativas

La fuerza total se puede escribir como

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^c + \mathbf{F}^{\text{nc}} \quad (6.48)$$

donde \mathbf{F}^c y \mathbf{F}^{nc} son las fuerzas conservativas y no conservativas respectivamente. El trabajo total es

$$\begin{aligned} W_{ba}^{\text{total}} &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_C \mathbf{F}^c \cdot d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{F}^{\text{nc}} \cdot d\mathbf{r} \\ &= -U_b + U_a + W_{ba}^{\text{nc}}. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Aquí U es la energía potencial asociada con la fuerza conservativa y W_{ab}^{nc} es el trabajo hecho por la fuerza no conservativa. El teorema de trabajo-energía, $W_{ba}^{\text{total}} = K_b - K_a$, ahora toma la forma

$$-U_b + U_a + W_{ba}^{\text{nc}} = K_b - K_a, \quad (6.50)$$

ó

$$K_b + U_b = K_a + U_a + W_{ba}^{\text{nc}}. \quad (6.51)$$

Si definimos la energía mecánica por

$$E = K + U, \quad (6.52)$$

tenemos

$$E_b - E_a = W_{ba}^{\text{nc}}. \quad (6.53)$$

Si definimos $Q = -W_{ab}$ como la energía disipada: la diferencia entre la energía mecánica inicial y final

$$\begin{aligned} E_a &= E_b - W_{ba}^{\text{nc}} \\ E_a &= E_b + Q. \end{aligned} \quad (6.54)$$

En el caso por ejemplo de la un movimiento en presencia de una fuerza no conservativa como la fricción, Q corresponde a la energía disipada en forma de calor.

En el caso del ejemplo asociado a la figura ??, si consideramos que entre las dos superficies hay fuerza fricción, esta realiza un trabajo sobre el bloque m_2 que se disipa en calor Q , a medida que el cuerpo de masa m_1 cae una distancia y_0 . El calor disipado esta dado por

$$\begin{aligned} Q &= -W_{ba} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_C (-\mu m_2 g, 0, 0) \cdot (dx, dy, dz) \\ &= -(-\mu m_2 g) \int_0^{y_0} dx \\ &= \mu m_2 g y_0, \end{aligned}$$

donde μ , es el coeficiente de fricción y donde hemos usado la ligadura consistente en que la distancia vertical recorrida es la misma que la distancia horizontal, pues la cuerda es ideal. Repitiendo los pasos que dieron lugar a la ec. (??)

que coincide exactamente con el resultado obtenido en la ecuación (??) utilizando las ecuaciones de la dinámica.

6.10. Energía potencial de un resorte

Por sencillez consideremos el caso de un resorte que se mueve a lo largo del eje x , como se muestra en la figura ???. Para una elongación $x - x_0$ a partir de su posición de equilibrio x_0 la fuerza está dada por la Ley de Hooke

$$\mathbf{F} = -k(x - x_0)\hat{\mathbf{i}}. \quad (6.55)$$

El trabajo para ir de a a b es

$$\begin{aligned} W_{ab} &= \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{x_a}^{x_b} F dx \\ &= -k \int_{x_a}^{x_b} (x - x_0) dx \\ &= -\frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \Big|_{x_0}^x \\ &= -\frac{1}{2}k(x - x_0)^2 + 0 \\ &= +0 + C - (\frac{1}{2}k(x - x_0)^2 + C) \\ &= U(x_0) - U(x). \end{aligned} \quad (6.56)$$

Y viceversa: de la siguiente energía potencial para el resorte,

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 + C \quad C = \text{constante}, \quad (6.57)$$

se puede obtener la fuerza conservativa

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\frac{\partial}{\partial x}U(x)\hat{\mathbf{i}} = \left(-\frac{2}{2}k(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + 0 \right) \hat{\mathbf{i}} \\ &= -k(x - x_0)\hat{\mathbf{i}}. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Por convención escogemos que la energía potencial sea cero en la posición de equilibrio:

$$\begin{aligned} U(x_0) = 0 &= \frac{1}{2}k(x_0 - x_0)^2 + C \\ 0 &= C, \end{aligned} \quad (6.59)$$

de modo que la energía potencial para el resorte es

$$U(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2. \quad (6.60)$$

Ejemplo 6.10.1. En $t = 0$ una masa atada a un resorte sobre una superficie horizontal sin fricción, es liberada desde el reposo a una distancia x_i desde la posición de equilibrio de un resorte. Encuentre la posición de la masa en cualquier tiempo posterior. Asumamos sin pérdida de generalidad que la posición de equilibrio del resorte se encuentra en $x_0 = 0$

Usando la conservación de la Energía Mecánica:

$$\begin{aligned} K_i + U_i &= K_f + U_f \\ \frac{1}{2}kx_i^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ kx_i^2 &= mv^2 + kx^2, \end{aligned} \quad (6.61)$$

despejando v :

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{x_i^2 - x^2} \quad (6.62)$$

note que la conservación de energía implica que $x \leq x_i$. Entonces

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{x_i^2 - x^2}. \quad (6.63)$$

Reorganizando términos

$$\frac{dx}{\sqrt{x_i^2 - x^2}} = \omega dt, \quad (6.64)$$

donde hemos definido la frecuencia angular ω como:

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (6.65)$$

Integrando (6.66)

$$\int_{x_i}^x \frac{dx}{\sqrt{x_i^2 - x^2}} = \omega \int_0^t dt, \quad (6.66)$$

$$\begin{aligned} \sin^{-1} \left(\frac{x}{x_i} \right) \Big|_{x_i}^x &= \omega t \\ \sin^{-1} \left(\frac{x}{x_i} \right) - \sin^{-1} (1) &= \omega t \\ \sin^{-1} \left(\frac{x}{x_i} \right) - \frac{\pi}{2} &= \omega t, \end{aligned} \quad (6.67)$$

despejando x , tenemos

$$x = x_i \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (6.68)$$

o

$$x = x_i \cos(\omega t) \quad (6.69)$$

6.11. Potencia

Potencia es la tasa de cambio del trabajo realizado. Si una fuerza \mathbf{F} actúa en un cuerpo que sufre un desplazamiento $\Delta \mathbf{r}$, tenemos que el trabajo en dicho segmento es de la ec.(6.7)

$$\Delta W_j = \mathbf{F}(\mathbf{r}_j) \cdot \Delta \mathbf{r}_j . \quad (6.70)$$

en el límite $\Delta t \rightarrow 0$

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} . \quad (6.71)$$

Definimos la potencia desarrollada por la fuerza como

$$\begin{aligned} P &= \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} . \end{aligned} \quad (6.72)$$

La unidad de potencia en el sistema SI es el watt (W):

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J s}^{-1} . \quad (6.73)$$

La relación entre un caballo de fuerza y el watt es

$$1 \text{ hp} \approx 746 \text{ W} . \quad (6.74)$$

Example 6.11.0.1

En la factura eléctrica se cobra la energía consumida al mes. El joule es una unidad demasiado pequeña, lo que obligaría a emplear cifras demasiado grandes, por eso es conveniente reescribirlo en potencia mayores. Note que

$$1 \text{ J} = \text{W s} . \quad (6.75)$$

De acuerdo a esto, pase a Joules las siguientes cantidades de energía

1. El kW h usado para medir el consumo eléctrico.
2. Los 75 GW h que consume el metro de Medellín en un año.

$$\begin{aligned} 1 \text{ kW h} &= 1\,000 \text{ W} \cdot 3\,600 \text{ s} \\ &= 1000 \frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot 3\,600 \text{ s} \\ &= 3\,600\,000 \text{ J} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 75 \text{ GW h} &= 75 \times 10^9 \text{ W} \cdot 3\,600 \text{ s} \\ &= 2.7 \times 10^{14} \text{ J} . \end{aligned}$$

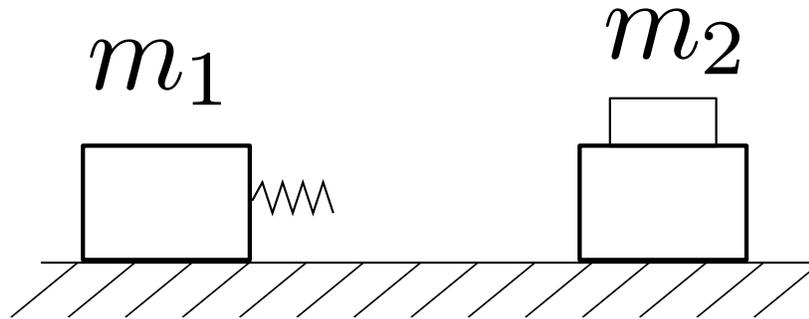


Figura 6.1: Colisión elástica

6.12. Colisiones

Un sistema de dos partículas interactuando en ausencia de fuerzas externas conserva el momento total, de modo que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i &= \mathbf{P}_f \\ m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 &= m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2. \end{aligned} \quad (6.76)$$

6.12.1. Colisiones elásticas

Una colisión en la cual la energía cinética no cambia es llamada una *colisión elástica*. Una colisión es elástica si las fuerzas de interacción son conservativas, como por ejemplo la interacción entre dos bloques que se deslizan sin fricción interactuando a través de resortes, como se ilustra en la figura 6.1.

Ejemplo 6.12.1. Colisiones entre dos bloques:¹

Considere la colisión entre dos bloques que interactúan a través de un resorte, como se muestra en la figura 6.1. Antes de la colisión el bloque de masa m_1 se mueve hacia la derecha con rapidez u_1 y el bloque de masa m_2 se encuentra en reposo. Encuentre las velocidades finales v_1 y v_2 en función de u_1 y las masas.

Como la colisión ocurre prácticamente en un punto, podemos despreciar la energía disipada en calor durante el pequeño intervalo de tiempo que dura la colisión. Entonces la energía cinética se conserva antes y después de la colisión.

Conservación de momento

$$\begin{aligned} p_i &= p_f \\ m_1 u_1 &= m_1 v_1 + m_2 v_2. \end{aligned} \quad (6.77)$$

Conservación de energía cinética

$$\begin{aligned} K_i &= K_f \\ m_1 u_1^2 &= m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2. \end{aligned} \quad (6.78)$$

¹Elaborado por Alexander Gallego

De (6.77)

$$v_1 = \frac{1}{m_1}(m_1u_1 - m_2v_2), \quad (6.79)$$

Reemplazando v_1 en 6.78

$$m_1u_1^2 = m_1 \left(\frac{m_1u_1 - m_2v_2}{m_1} \right)^2 + m_2v_2^2, \quad (6.80)$$

y desarrollando el binomio

$$\begin{aligned} m_1u_1^2 &= \frac{1}{m_1}(m_1^2u_1^2 - 2m_1m_2u_1v_2 + m_2^2v_2^2) + m_2v_2^2 \\ m_1u_1^2 &= m_1u_1^2 - 2m_2u_1v_2 + \frac{m_2^2}{m_1}v_2^2 + m_2v_2^2. \end{aligned} \quad (6.81)$$

Cancelando $m_1u_1^2$ a ambos lados y dividiendo por m_2v_2 y factorizando v_2

$$\begin{aligned} 0 &= -2m_2u_1v_2 + \frac{m_2^2}{m_1}v_2^2 + m_2v_2^2 \\ 0 &= -2u_1 + \frac{m_2}{m_1}v_2 + v_2 \\ 0 &= -2u_1 + \left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right) v_2 \\ 0 &= -2u_1 + \left(\frac{m_2 + m_1}{m_1} \right) v_2, \end{aligned} \quad (6.82)$$

obtenemos

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}u_1. \quad (6.83)$$

Reemplazando este valor en (6.79)

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{m_1} \left(m_1u_1 - \frac{2m_2m_1u_1}{m_1 + m_2} \right) \\ &= \frac{u_1}{m_1} \left(m_1 - \frac{2m_2m_1}{m_1 + m_2} \right) \\ &= u_1 \left(1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) \\ &= u_1 \left(\frac{m_1 + m_2 - 2m_2}{m_1 + m_2} \right) \\ v_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}u_1 \end{aligned} \quad (6.84)$$

Asumiendo que el bloque 1 se mueve inicialmente hacia la derecha: $u_1 > 0$, tenemos los siguientes casos:

$$v_1 \rightarrow \begin{cases} = 0 & \text{si } m_1 = m_2 \\ > 0 & \text{si } m_1 > m_2 \\ < 0 & \text{si } m_1 < m_2 \end{cases}. \quad (6.85)$$

■

6.12.2. Colisiones inelásticas

En un segundo experimento, tome el mismo par de bloques y reemplace el resorte por una masilla adhesiva. Considere el segundo bloque inicialmente en reposo. Después de la colisión ambos bloques se quedan pegados y se mueven con alguna velocidad v' . Por conservación del momento

$$m_1 v = (m_1 + m_2) v', \quad (6.86)$$

de modo que

$$v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v. \quad (6.87)$$

La diferencia de energías cinéticas inicial menos final:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_1 v^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2 &= \frac{1}{2} m_1 v^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 v^2 - \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 v^2 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) \end{aligned} \quad (6.88)$$

es claramente diferente de cero. Por ejemplo, si $m_1 = m_2$, la energía disipada corresponde a la mitad de la energía cinética inicial. La energía cinética a cambiado debido a que las fuerzas fueron no conservativas. Parte de la energía del movimiento colectivo fue transformada en una energía calórica en el proceso de pegado durante la colisión. Una colisión en la cual la energía es no conservada es llamada una *colisión inelástica*. Si los cuerpos quedan juntos después de la colisión, decimos que la colisión es completamente inelástica.

Aunque la energía total del sistema es siempre conservada en colisiones, parte de la energía cinética puede ser convertida a alguna otra forma. Para tener en cuenta éste hecho, escribamos la conservación de la energía para colisiones como

$$K_i = K_f + Q, \quad (6.89)$$

donde $Q = K_i - K_f$ es la cantidad de energía cinética convertida a otra forma

Para colisiones en una dimensión, la ec. (6.76) Conservación de momento se reduce a

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2, \quad (6.90)$$

y conservación de energía cinética es

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v'^2_1 + m_2 v'^2_2 + Q. \quad (6.91)$$

Una vez se calcule Q , el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se puede resolver

Ejemplo 6.12.2. Solución] En los tramos AB y CD sólo realiza trabajo el peso porque \mathbf{N} es perpendicular a la trayectoria. En el sector BC sólo realiza trabajo la fricción, porque el peso y la normal son perpendiculares a la trayectoria. El peso es una fuerza conservativa, mientras que la fricción es una fuerza no conservativa.

En el sector AB: Conservación de la energía

$$mgR = \frac{1}{2}mv_B^2 \quad (6.92)$$

de donde

$$v_B = \sqrt{2gR} \quad (6.93)$$

En el sector BC: El momento en la dirección horizontal es igual justo antes y justo después de la colisión; como la colisión es completamente inelástica los cuerpos se quedan pegados

$$\begin{aligned} mv_B &= (m + m)v'_B \\ mv_B &= 2mv'_B \\ v_B &= 2v'_B, \end{aligned} \quad (6.94)$$

entonces

$$\begin{aligned} v'_B &= \frac{1}{2}v_B \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2gR} \\ &= \sqrt{\frac{gR}{2}}. \end{aligned} \quad (6.95)$$

Como la fricción es constante en BC,

$$W_f = -f(x_C - x_B) = -fR. \quad (6.96)$$

Por otro lado $f = \mu N_2 = 2mg$, de modo que

$$W_f = -2\mu mgR = -Q. \quad (6.97)$$

De la ec. (6.89)

$$K_B - K_C = Q = 2\mu mgR. \quad (6.98)$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(2m)v_B'^2 - \frac{1}{2}(2m)v_C^2 &= 2\mu mgR \\ v_B'^2 - v_C^2 &= 2\mu gR \end{aligned} \quad (6.99)$$

despejando v_C

$$v_C^2 = v_B'^2 - 2\mu gR \quad (6.100)$$

$$\begin{aligned} v_C^2 &= \frac{gR}{2} - 2\mu gR \\ &= \frac{gR}{2} (1 - 4\mu). \end{aligned} \quad (6.101)$$

de modo que

$$v_C = \sqrt{\frac{gR}{2}(1 - 4\mu)}. \quad (6.102)$$

El sistema alcanza a llegar a C si v_c es real, esto es si

$$1 - 4\mu \geq 0 \implies \mu \leq \frac{1}{4}. \quad (6.103)$$

En el sector CD : Conservación de la energía

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(2m)v_C^2 &= 2mgh \\ &= 2mg(R - R \cos \theta) \\ &= 2mgR(1 - \cos \theta) \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{gR}{2}(1 - 4\mu) &= gR(1 - \cos \theta) \\ \frac{1}{4}(1 - 4\mu) &= 1 - \cos \theta \\ \frac{1}{4} - \mu &= 1 - \cos \theta. \end{aligned} \quad (6.104)$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= 1 - \frac{1}{4} + \mu \\ &= \frac{3}{4} + \mu, \end{aligned} \quad (6.105)$$

El θ_{\min} se obtiene cuando $\mu = 1/4$:

$$\cos \theta_{\min} = 1 \quad \text{o} \quad \theta_{\min} = 0 \quad (6.106)$$

Así mismo, el θ_{\max} se obtiene cuando $\mu = 0$:

$$\begin{aligned} \theta_{\max} &\approx 0.723 \text{ rad} \\ &\approx 41.4^\circ. \end{aligned} \quad (6.107)$$

Note que si $m = 1 \text{ kg}$ y $R = 1 \text{ m}$, la energía disipada en forma de calor en el tramo BC cuando $\mu = 0.1$ es

$$\begin{aligned} Q &= 2\mu mgR \\ &= 2 \cdot 0.1 \cdot 1 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 1 \text{ m} \\ &= 1.96 \text{ kgm}^2/\text{s}^2 \\ &= 1.96 \text{ J}. \end{aligned} \quad (6.108)$$

■

6.13. Colisiones y coordenadas de centro de masa

Para estudiar las colisiones de dos partículas que se mueven con velocidades \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 en lo que se denomina *sistema de laboratorio L*, es conveniente reescribir las posiciones y velocidades en el sistema de centro de masa *C*.

Del Capítulo 5 sobre moméntum, tenemos:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (6.109)$$

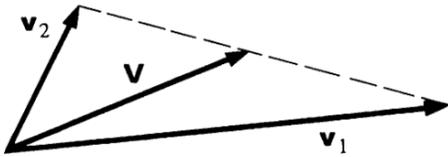
De modo que las coordenadas en el sistema *C* satisfacen:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1c} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} \\ \mathbf{r}_{2c} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (6.110)$$

De la ec. (6.109)

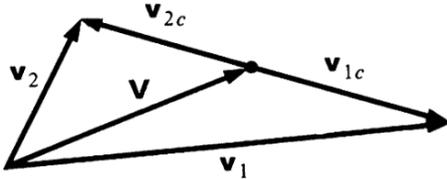
$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{1c} &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ \mathbf{r}_{2c} &= -\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \end{aligned} \quad (6.111)$$

Derivando con respecto al tiempo estas expresiones, obtenemos



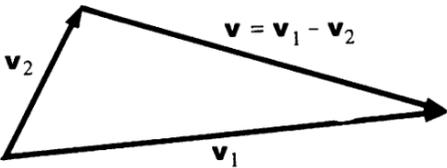
$$\mathbf{V} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (6.112)$$

\mathbf{V} está en la línea que une \mathbf{v}_1 con \mathbf{v}_2 .



De modo que las coordenadas en el sistema *C* satisfacen:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{1c} &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{V} \\ \mathbf{v}_{2c} &= \mathbf{v}_2 - \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (6.113)$$



De la ec. (6.111)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{1c} &= \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \\ \mathbf{v}_{2c} &= -\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2). \end{aligned} \quad (6.114)$$

\mathbf{v}_{1c} y \mathbf{v}_{2c} están en direcciones opuestas a lo largo del vector de velocidad relativa $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$

De esta forma, las cantidades de movimiento desde el sistema *C* son

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{1c} &= m_1\mathbf{v}_{1c} \\ &= \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \\ &= \mu(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \end{aligned} \quad (6.115)$$

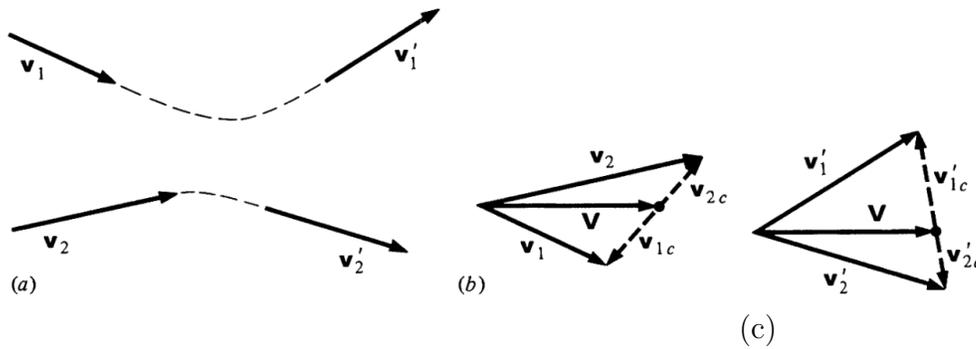


Figura 6.2: Colisiones

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_{2c} &= m_2 \mathbf{v}_{2c} \\
 &= - \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \\
 &= - \mu (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2),
 \end{aligned} \tag{6.116}$$

donde

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{6.117}$$

Podemos ahora calcular el moméntum total en el sistema de centro de masa C

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_{1c} + \mathbf{p}_{2c} &= \mu (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) - \mu (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

y las cantidades de movimiento en el centro de masa son iguales y opuestas

$$\mathbf{p}_{1c} = - \mathbf{p}_{2c}. \tag{6.118}$$

El moméntum en el sistema L es

$$\begin{aligned}
 m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 &= (m_1 + m_2) \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \\
 &= (m_1 + m_2) \mathbf{V}
 \end{aligned}$$

y ya que el moméntum es conservado en cualquier colisión, entonces \mathbf{V} es constante. Podemos usar este resultado como una ayuda para visualizar los vectores de velocidad antes y después de la colisión.

La figura 6.2 (a) muestra las trayectoria y velocidades de dos partículas en colisión. En la figura 6.2 (b) mostramos las velocidades iniciales en los sistema L y C . Todos los vectores están sobre el mismo plano. \mathbf{v}_{1c} y \mathbf{v}_{2c} deben estar espaldas a espaldas ya que el moméntum total en el sistema C es cero.

Después de la colisión, como se muestra en la figura 6.2 (c), las velocidades en el sistema C son de nuevo espaldas a espaldas. La figura también muestra las velocidades finales en el sistema de laboratorio, obtenidas siguiendo el mismo procedimiento usado para llegar a la ec. (6.114).

Reescribiendo \mathbf{V} dado por la ec. (6.113), en términos de las velocidades después de la colisión

$$\mathbf{V} = \frac{m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2}{m_1 + m_2} \quad (6.119)$$

Repitiendo los mismos pasos pero en términos de las velocidades finales, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_{1c} &= \mathbf{v}'_1 - \mathbf{V} \\ &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2) \\ \mathbf{v}'_{2c} &= \mathbf{v}'_2 - \mathbf{V} \\ &= - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) (\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2) . \end{aligned} \quad (6.120)$$

Note que el plano de la figura 6.2 (c) no es necesariamente el plano de la figura 6.2 (a). Evidentemente las relaciones geométricas entre las velocidades iniciales y finales en el sistema L es bastante complicado. Afortunadamente, la situación en el sistema C es mucho más simple. Las velocidades iniciales y finales en el sistema C determinan un plano conocido como el plano de dispersión. Cada partícula es desviada a través del mismo ángulo de dispersión Θ en este plano.

La fuerza de interacción debe ser conocida para poder calcular Θ , o al contrario, midiendo la desviación podemos aprender sobre la fuerza de interacción. Sin, embargo evitaremos estas consideraciones y asumiremos que la interacción ha causado alguna desviación en el sistema C .

Si además la colisión es elástica y denotando con primas las velocidades después de la colisión tenemos

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1c}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2c}^2 = \frac{1}{2} m_1 v'_{1c}{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v'_{2c}{}^2 . \quad (6.121)$$

Ya que el momento inicial y final es cero, y escogiendo convenientemente el eje x de los sistemas C y C' , de manera que coincida con los vectores momento, tenemos

$$\begin{aligned} m_1 v_{1c} + m_2 v_{2c} &= 0 \\ m_2 v'_{1c} + m_2 v'_{2c} &= 0 \end{aligned} \quad (6.122)$$

y

$$\begin{aligned} v_{2c} &= - \frac{m_1}{m_2} v_{1c} \\ v'_{2c} &= - \frac{m_1}{m_2} v'_{1c} . \end{aligned} \quad (6.123)$$

Reemplazando en ec. (6.121)

$$\begin{aligned} m_1 v_{1c}^2 + \frac{m_1^2}{m_2} v_{1c}^2 &= m_1 v'_{1c}{}^2 + \frac{m_1^2}{m_2} v'_{1c}{}^2 \\ \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2} \right) v_{1c}^2 &= \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2} \right) v'_{1c}{}^2 \\ v_{1c}^2 &= v'_{1c}{}^2 , \end{aligned} \quad (6.124)$$

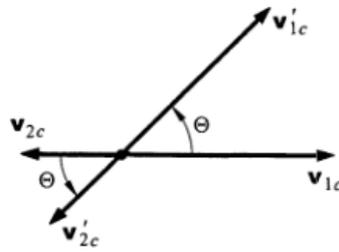


Figura 6.3: Colisión general de dos cuerpos

de modo que

$$v_{1c} = v'_{1c}.$$

Sustituyendo en la ec. (6.123), obtenemos que

$$v_{2c} = v'_{2c}.$$

En resumen, el problema general de la colisión de dos cuerpos, visto desde el sistema del centro de masa, implica que

$$\begin{aligned} v_{1c} &= v'_{1c} \\ v_{2c} &= v'_{2c}. \end{aligned} \tag{6.125}$$

En una colisión elástica, la rapidez de cada partícula en el sistema de centro de masa es la misma antes y después de la colisión. Así, los vectores de velocidad simplemente rotan en el ángulo de dispersión, como se muestra en la figura 6.3

6.13.1. Ángulo de dispersión

Considere la dispersión elástica de una partícula de masa m_1 y velocidad \mathbf{v}_1 con una partícula de masa m_2 en reposo, como se muestra en la figura ?? (a). Después de la colisión las partículas se mueven con velocidades \mathbf{v}'_1 y \mathbf{v}'_2 . Es más fácil analizar el movimiento desde el Sistema de centro de masa. Como no hay fuerzas externas actuando sobre el par de partículas, el centro de masa se mueve a velocidad constante [ver fig. ?? (c)] dada por la ec. (6.112) con $\mathbf{v}_2 = 0$

$$\mathbf{V} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1. \tag{6.126}$$

Un observador en el centro de masa ve las dos partículas moverse con las velocidades dadas en la ec. (6.113)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{1c} &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{V} \\ \mathbf{v}_{2c} &= -\mathbf{V}, \end{aligned}$$

e ilustradas en la fig. ?? (d). De las ecuaciones (6.114)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{1c} &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_{2c} &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1. \end{aligned} \tag{6.127}$$

Como después de la colisión la velocidad \mathbf{v}'_2 es diferente de cero, entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{v}'_{1c} &= \mathbf{v}'_1 - \mathbf{V} \\ \mathbf{v}'_{2c} &= \mathbf{v}'_2 - \mathbf{V}.\end{aligned}\quad (6.128)$$

Estas sumas vectoriales están representadas en la fig. ?? (e) que dan lugar a los vectores espalda a espalda mostrados en la fig. ?? (e), con \mathbf{v}'_{1c} , por ejemplo, formando un ángulo Θ con la dirección de \mathbf{v}_{1c} como se representa en la figura ??.

Allí tenemos de nuevo la representación geométrica de la ecuación para \mathbf{v}'_{1c} dada por la ec. (6.128).

El ángulo Θ puede variar en todo su rango desde 0 hasta 2π . Para hallar la relación con uno de los ángulo en el sistema de laboratorio, θ_1 , tenemos de la trigonometría de la fig. ?? que

$$\begin{aligned}\tan \theta_1 &= \frac{v'_{1c} \sin \Theta}{V + v'_{1c} \cos \Theta} \\ &= \frac{\sin \Theta}{(V/v'_{1c}) + \cos \Theta}.\end{aligned}\quad (6.129)$$

Ya que $v'_{1c} = v_{1c}$

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \Theta}{(V/v_{1c}) + \cos \Theta}.\quad (6.130)$$

Desarrollando la magnitud del vector \mathbf{v}_{1c} en las ecs. (6.127),

$$v_{1c} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1,$$

y usando la ec. (6.126), tenemos

$$\begin{aligned}v_{1c} &= \frac{m_2}{m_1} \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \\ &= \frac{m_2}{m_1} V.\end{aligned}$$

De modo que

$$\frac{V}{v_{1c}} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Reemplazando finalmente en (6.130), tenemos finalmente que

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \Theta}{(m_1/m_2) + \cos \Theta}.$$

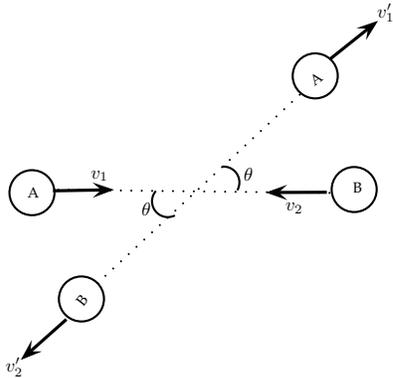
Cuando $m_1/m_2 < 1$ (o $m_1 < m_2$), θ_1 también puede variar entre 0 y 2π . Pero si $m_1 > m_2$, $\tan \theta_1$ queda limitado por un valor máximo. En particular en el límite en $m_1 \gg m_2$:

$$\tan \theta_1 \approx \frac{m_2}{m_1} \tan \Theta \rightarrow 0 \quad \text{si } m_1 \gg m_2.$$

Una bola muy pesada simplemente arrastra la pequeña pero sin cambiar sustancialmente la dirección.

6.14. Problemas resueltos

1. Un auto **A** cuya rapidez es v_1 choca con un auto **B**, cuya rapidez es v_2 , tal como se muestra en la figura. La masa del auto **A** es m y la masa del auto **B** es $6/5 m$. Se sabe que los automóviles se aproximaban con cantidades de movimiento de igual magnitud y direcciones opuestas, y que la colisión es elástica, es decir, que la energía cinética del sistema se conserva en la colisión.



- Determine v_2 en términos de v_1 .
- Encuentre la magnitud de las velocidades v_1' y v_2' de cada auto después de la colisión.
- Calcule las cantidades del literal anterior para $v_1 = 10$ m/s.

Solución: **1a** : De la conservación del momento, sobre la línea de colisión

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 &= 0 \\ mv_1 - \frac{6}{5}mv_2 &= 0 \\ v_2 &= \frac{5}{6}v_1 \end{aligned}$$

1b El momento después de la colisión es cero y por consiguiente

$$v_2' = \frac{5}{6}v_1',$$

De la conservación de energía cinética

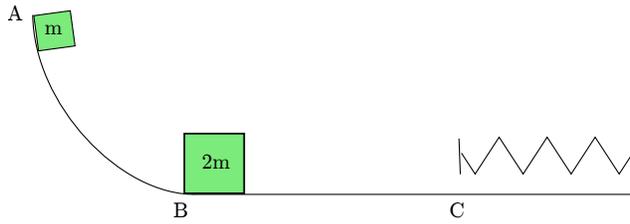
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{6}{5}m\right)v_2^2 &= \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{6}{5}m\right)v_2'^2 \\ v_1^2 + \left(\frac{5}{6}\right)v_2^2 &= v_1'^2 + \left(\frac{5}{6}\right)v_2'^2 \\ \frac{11}{6}v_1^2 &= \frac{11}{6}v_1'^2 \\ v_1^2 &= v_1'^2, \end{aligned}$$

y entonces

$$v_2' = \frac{5}{6}v_1'.$$

2.

3. (Tomado de [8]) Un bloque de masa m se suelta desde el punto A y este se desliza sobre el cuadrante circular AB de radio R , llegando a B con velocidad v_1 de acuerdo a la figura. En B choca elásticamente con el bloque de masa $2m$ que se encuentra inicialmente en reposo. Luego del choque, la masa $2m$ se mueve sobre la superficie horizontal lisa hasta chocar y comprimir un resorte de constante elástica k . El cuadrante circular AB es rugoso. Calcular



- El trabajo realizado por la fuerza de fricción en el tramo AB .
- La velocidad de cada bloque después del choque.
- La compresión del resorte.
- Calcule las cantidades de los literales anteriores para $m = 2 \text{ Kg}$, $RO = 0.5 \text{ m}$, $v_1 = 2.1 \text{ m/s}$, $k = 1000 \text{ N/m}$

Solución

3a

$$\begin{aligned} W_{ba} &= E_b - E_a \\ &= \frac{1}{2}mv_1^2 - mgR, \end{aligned}$$

3b

$$mv_1 = mv'_1 + 2mv'_2 \quad (6.131)$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}(2m)v_2'^2. \quad (6.132)$$

de (6.131)

$$v'_1 = v_1 - 2v'_2,$$

y en (6.132)

$$\begin{aligned} 2v_2'^2 &= v_1^2 - v_1'^2 \\ &= v_1^2 - (v_1^2 - 4v_1v'_2 + 4v_2'^2) \\ &= 4v_2'(v_1 - v_2'). \end{aligned}$$

Simplificando

$$v_2' = 2v_1 - 2v_2',$$

y

$$v_2' = \frac{2}{3}v_1,$$

además

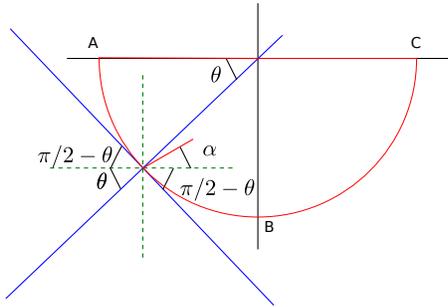
$$\begin{aligned} v_1' &= v_1 - 2v_2' \\ &= v_1 - \frac{4}{3}v_1 \\ &= -\frac{1}{3}v_1 \end{aligned}$$

3c

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(2m)v_2'^2 &= \frac{1}{2}kx^2 \\ mv_2'^2 &= \frac{1}{2}kx^2 \\ mv_2' &= \frac{1}{2}\sqrt{kx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= v_2' \sqrt{\frac{2m}{k}} \\ &= \frac{2v_1}{3} \sqrt{\frac{2m}{k}}. \end{aligned}$$

4. Un anillo resbala a lo largo de un arco metalico ABC muy pulido que es arco de una circunferencia de radio $R = 1.2\text{ m}$. Sobre el anillo actúa una fuerza \mathbf{F} de magnitud 150 N y dirección constante formando un ángulo de $\alpha = \pi/6$ con la horizontal.



Calcular el trabajo efectuado por la fuerza \mathbf{F} sobre el anillo al moverse desde A a B y de B a C

Solución En la figura se muestra el anillo en una posición general, de la figure tenemos que en el sistema de coordenadas $\hat{\mathbf{r}}-\hat{\boldsymbol{\theta}}$:

$$\mathbf{F} = F_r \hat{\mathbf{r}} + F_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}},$$

donde

$$\begin{aligned} F_\theta &= F \cos(\pi/2 - \theta + \alpha) \\ &= F \sin(\alpha - \theta). \end{aligned}$$

Además del próximo capítulo:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{dr}{dt} \hat{\mathbf{r}} + r \frac{d\theta}{dt} \hat{\boldsymbol{\theta}},$$

de modo que

$$d\mathbf{r} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Por la simetría del problema el trabajo para ir de A a C es el doble de ir de A a B , además, como el movimiento sólo de da a lo largo de dirección tangencial al arco, entonces sólo

la componente tangencial de la fuerza realiza trabajo. Con todas estas consideraciones tenemos:

$$\begin{aligned}
 W_{AC} = 2W_{AB} &= \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\
 &= 2 \int_A^B (F_r \hat{\mathbf{r}} + F_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \cdot (dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\
 &= 2 \int_A^B (F_\theta r d\theta) \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} F_\theta r d\theta \\
 &= 2Fr \int_0^{\pi/2} \sin(\alpha - \theta) d\theta \\
 &= 2Fr \cos(\alpha - \theta) \Big|_0^{\pi/2} \\
 &= 2Fr [\sin(\alpha - \pi/2) - \sin(\pi/6)] \\
 &= 131.77 \text{ J} .
 \end{aligned}$$

5.

...

Solución

iref

Capítulo 7

Movimiento del cuerpo rígido

7.1. Movimiento Circular Uniforme I

Considere el movimiento de un objeto atado a una cuerda que es forzado a girar en un plano horizontal. Queremos encontrar determinar la tensión de la cuerda en función de la rapidez y el radio de giro. Si la rapidez es constante el movimiento está descrito por la siguiente ecuación

$$\mathbf{r}(t) = r \left[\hat{\mathbf{i}} \cos(\omega t) + \hat{\mathbf{j}} \sin(\omega t) \right], \quad (7.1)$$

con $r = \text{constante}$ y $\omega = \text{constante}$, representado en la figura ??.

La velocidad es

$$\mathbf{v} = r\omega \left[-\hat{\mathbf{i}} \sin(\omega t) + \hat{\mathbf{j}} \cos(\omega t) \right], \quad (7.2)$$

representado en la figura ??. Note que,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = r^2\omega \left[-\sin(\omega t) \cos(\omega t) + \sin(\omega t) \cos(\omega t) \right] = 0,$$

de modo que los vectores son perpendiculares entre sí.

La aceleración es

$$\mathbf{a} = -r\omega^2 \left[\hat{\mathbf{i}} \cos(\omega t) + \hat{\mathbf{j}} \sin(\omega t) \right], \quad (7.3)$$

representado en la figura ??. Note que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = r^2\omega^3 \left[-\sin(\omega t) \cos(\omega t) + \sin(\omega t) \cos(\omega t) \right] = 0,$$

de modo que los vectores son perpendiculares. Además $\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = -1$, de modo que los vectores son antiparalelos.

Ejemplo

Ejemplo

Cálculo la aceleración gravitacional de la Tierra sobre un satélite en una órbita geostacionario a una altura de 35 786 Km sobre el nivel del mar.

Teniendo en cuenta que el radio de la Tierra es de 6 371 Km, y que la período de rotación es de 24 h:

$$\begin{aligned} a &= r\omega^2 = r(2\pi\nu)^2 = 4\pi^2 r\nu^2 \\ &\approx 4\pi^2(35\,786 + 6\,371)\text{Km} \frac{1\,000\text{ m}}{\text{Km}} \times \left(\frac{1}{24\text{ h}} \frac{\text{h}}{3\,600\text{ s}}\right)^2 \\ &\approx 0.28\text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

7.1.1. Movimiento generalizado en coordenadas polares

Para algunos problemas en dos dimensiones, es conveniente reescribir el vector de posición $\mathbf{r}(t) = x(t)\hat{\mathbf{i}} + y(t)\hat{\mathbf{j}}$ en términos de coordenadas polares:

La ecuación para el vector de posición puede escribirse en general como

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= r(t) \left\{ \hat{\mathbf{i}} \cos[\theta(t)] + \hat{\mathbf{j}} \sin[\theta(t)] \right\} \\ &= r(t)\hat{\mathbf{r}}(t), \end{aligned} \tag{7.4}$$

donde

$$\hat{\mathbf{r}}(t) = \hat{\mathbf{i}} \cos[\theta(t)] + \hat{\mathbf{j}} \sin[\theta(t)]. \tag{7.5}$$

El vector perpendicular a $\hat{\mathbf{r}}(t)$ describe la dirección angular. De la figura

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) &= \hat{\mathbf{i}} \cos[\theta(t) + \pi/2] + \hat{\mathbf{j}} \sin[\theta(t) + \pi/2] \\ &= -\hat{\mathbf{i}} \sin[\theta(t)] + \hat{\mathbf{j}} \cos[\theta(t)]. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Las ecuaciones (7.5) y (7.6) pueden escribirse en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{r}}(t) \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{j}} \end{pmatrix}. \tag{7.7}$$

con inverso

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{r}}(t) \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) \end{pmatrix}. \tag{7.8}$$

De la ec. (7.4), la velocidad es

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{r}(t)\hat{\mathbf{r}}(t) + r(t)\dot{\hat{\mathbf{r}}}(t). \tag{7.9}$$

Ahora, de la ec. (7.5)

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{r}}}(t) &= \frac{d}{dt} \left(\hat{\mathbf{i}} \cos[\theta(t)] + \hat{\mathbf{j}} \sin[\theta(t)] \right) \\ &= \dot{\theta} \left(-\hat{\mathbf{i}} \sin[\theta(t)] + \hat{\mathbf{j}} \cos[\theta(t)] \right) \end{aligned} \tag{7.10}$$

y usando la ec. (7.6)

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (7.11)$$

Sustituyendo en la ec. (7.9):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \dot{r}(t) \hat{\mathbf{r}}(t) + r(t) \dot{\theta}(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) \\ &= \dot{r}(t) \hat{\mathbf{r}}(t) + r(t) \omega(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}(t). \end{aligned} \quad (7.12)$$

donde hemos definido la velocidad angular instantánea como

$$\omega(t) = \dot{\theta}(t). \quad (7.13)$$

Además

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(t) &= -\hat{\mathbf{i}} \dot{\theta}(t) \cos[\theta(t)] - \hat{\mathbf{j}} \dot{\theta}(t) \sin[\theta(t)] \\ &= -\dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{r}}(t). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Usando (7.12) con (7.11) y (7.14), la aceleración es

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \\ &= \ddot{r}(t) \hat{\mathbf{r}}(t) + \dot{r}(t) \dot{\hat{\mathbf{r}}}(t) + \dot{r}(t) \dot{\theta}(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) + r(t) \ddot{\theta}(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) + r(t) \dot{\theta}(t) \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(t) \\ &= \ddot{r}(t) \hat{\mathbf{r}}(t) + \dot{r}(t) \dot{\theta}(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) + \dot{r}(t) \dot{\theta}(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) + r(t) \ddot{\theta}(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) - r(t) \dot{\theta}(t) \dot{\theta}(t) \hat{\mathbf{r}}(t) \\ &= \left[\underbrace{\ddot{r}(t)}_{\text{Acel. lineal.}} - \underbrace{r(t) \dot{\theta}^2(t)}_{\text{Acel. centrípeta.}} \right] \hat{\mathbf{r}}(t) + \left[\underbrace{r(t) \ddot{\theta}(t)}_{\text{Acel. lineal tangencial.}} + \underbrace{2\dot{r}(t) \dot{\theta}(t)}_{\text{Acel. de coriolis.}} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}}(t). \end{aligned} \quad (7.15)$$

7.1.2. Vector de velocidad angular

Es conveniente definir un espacio tridimensional asignando un vector unitario, $\hat{\boldsymbol{\omega}}$, perpendicular al plano en coordenadas polares $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, tal que

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Entonces

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{r}} \qquad \hat{\mathbf{r}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \times \hat{\boldsymbol{\omega}}.$$

De esta formula, la ecuación para la velocidad en coordenadas polares (7.12), puede escribirse como

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \dot{r}(t) \hat{\mathbf{r}}(t) + r(t) \omega(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) \\ &= \frac{\dot{r}(t)}{r(t)} r(t) \hat{\mathbf{r}}(t) + r(t) \omega(t) \hat{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{r}} \\ &= \frac{\dot{r}(t)}{r(t)} \mathbf{r}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}(t), \end{aligned} \quad (7.16)$$

donde hemos identificado la dirección perpendicular al plano $\hat{\mathbf{r}}-\hat{\boldsymbol{\theta}}$, con la dirección de la velocidad angular

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega(t)\hat{\boldsymbol{\omega}}(t). \quad (7.17)$$

Las componentes angulares como tal:

$$\theta_x \hat{\mathbf{i}} + \theta_y \hat{\mathbf{j}} + \theta_z \hat{\mathbf{k}},$$

no pueden formar un vector, pues no resultaría ser conmutativo, como puede mostrarse fácilmente haciendo rotaciones sobre los tres ejes de un libro en el espacio. La diferencia entre las diferentes posibilidades de rotaciones son del orden de $\Delta\theta_{x,y,x}^2$, de modo que las componentes diferenciales si forman un vector.

Definimos entonces la velocidad angular en tres dimensiones como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \frac{d\theta_x}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{d\theta_y}{dt} \hat{\mathbf{j}} + \frac{d\theta_z}{dt} \hat{\mathbf{k}} \\ &= \omega_x \hat{\mathbf{i}} + \omega_y \hat{\mathbf{j}} + \omega_z \hat{\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (7.18)$$

la cual si constituye un vector.

7.1.3. Movimiento circular uniforme II

Una partícula en movimiento circular uniforme (MCU), dado por la ec. (7.19), mantiene el radio del movimiento constante con respecto a un sistema de referencia en el centro de giro. Por lo tanto, en coordenadas polares dicho movimiento satisface que

$$\dot{r} = 0 \quad (7.19)$$

$$\theta(t) = \omega t, \quad \dot{\theta}(t) = \omega, \quad \ddot{\theta}(t) = 0. \quad (7.20)$$

De modo que reemplazando las ecuaciones en las ecuaciones (7.12), (7.15), y usando la transformación inversa (7.7), tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= r\hat{\mathbf{r}}(t) \\ &= r \left(\hat{\mathbf{i}} \cos(\omega t) + \hat{\mathbf{j}} \sin(\omega t) \right), \end{aligned} \quad (7.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= r\omega\hat{\boldsymbol{\theta}}(t) \\ &= r\omega \left(-\hat{\mathbf{i}} \sin(\omega t) + \hat{\mathbf{j}} \cos(\omega t) \right), \end{aligned} \quad (7.22)$$

en magnitud:

$$v = r\omega. \quad (7.23)$$

La siguiente derivada da lugar a

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \dot{\mathbf{v}}(t) = -r(t)\omega^2(t)\hat{\mathbf{r}}(t) \\ &= -\frac{(r\omega)^2}{r}\hat{\mathbf{r}}, \end{aligned}$$

y usando la ec.(7.23)

$$\mathbf{a}(t) = -\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}} \quad (7.24)$$

de modo que en el MCU la velocidad no tiene componente radial, y sólo contribuye la aceleración centrípeta, como era de esperarse.

Ejemplo 7.1.1. MCU: Calcule la fuerza para mantener un cuerpo de masa m en un movimiento circular uniforme

Tenemos que la ec. (7.24) da lugar a

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -\frac{mv^2}{r}\hat{\mathbf{r}}. \quad (7.25)$$

□

Ejemplo 7.1.2. Calcular la velocidad de rotación de una partícula girando en movimiento circular en una plano paralelo al plano x - y y con el eje z pasando por el centro de la orbita circular.

□

7.2. Momento angular y torque para una partícula

Como último caso de aplicación del teorema de Noether, debemos preguntarnos cual es la cantidad conservada asociada a la isotropía del espacio, es decir con la invarianza de la leyes de la naturaleza con respecto a rotaciones en el espacio: si realizamos un experimento sobre una mesa, y luego lo repetimos con la mesa rotada en algún ángulo sobre un eje perpendicular a la superficie, entonces el resultado del experimento debe ser el mismo.

La cantidad conservada es más fácil de visualizar en el caso de la rotación de un cuerpo rígido, es decir, un cuerpo dentro del cual todas la partículas que lo componen mantienen su posición de manera que el cuerpo siempre esta cohesionado. De este modo, dentro un cuerpo rígido en rotación con respecto a algún eje todas la partículas se mueven con la misma velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Cuando observamos un cuerpo rígido girando con respecto a un *sólo* eje de giro como la rueda de una bicicleta, un yoyó, un trompo, etc; podemos ver que la dirección del eje de giro se opone al cambio de dirección. En particular la conservación del eje de giro de las ruedas es lo que garantiza el equilibrio de una bicicleta en movimiento.

La cantidad conservada entonces debe ser una cantidad proporcional al vector $\boldsymbol{\omega}$ asociada con el giro de una de la partículas que compone el cuerpo rígido. Como por definición el radio de giro de tal partícula es constante, entonces la combinación de cantidades vectoriales relevante debe ser alguna de las combinaciones entre \mathbf{r} , \mathbf{v} y $\boldsymbol{\omega}$ (tal que usando la regla de la mano derecha, la mano se debe enrollar de \mathbf{r} a \mathbf{v} para definir $\boldsymbol{\Omega}$)

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}.$$

Asumimos entonces que la cantidad conserva es proporcional al vector de velocidad angular, y la definimos de manera que el factor de proporcionalidad sea la masa de la partícula: $m(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$.

Comencemos entonces definiendo el momento angular para una partícula de momentum \mathbf{p} como

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \quad (7.26)$$

y el correspondiente vector de torque como el causante de los cambios en el momento angular cuando es aplicado durante algún intervalo Δt sobre la partícula.

Podemos establecer entonces el *principio de momento angular* para una partícula como

$$\Delta \mathbf{L} \approx \boldsymbol{\tau} \Delta t. \quad (7.27)$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ es el torque aplicado sobre la partícula.

En forma diferencial el principio de momento angular puede escribirse como

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (7.28)$$

Desarrollando esta expresión, tenemos que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \\ &= \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\ &= \mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \end{aligned} \quad (7.29)$$

como \mathbf{v} es paralelo a \mathbf{p} , $\mathbf{v} \times \mathbf{p} = 0$, y teniendo en cuenta que la variación del momentum es la fuerza aplicada, \mathbf{F} , entonces

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (7.30)$$

Para entender las definiciones de momento angular y torque es mejor ir hacia atrás del resultado en (7.30) al resultado en (7.26): La capacidad de una fuerza para ejercer un giro sobre una partícula depende de la distancia a la que es aplicada la fuerza.

7.3. momento angular para un cuerpo rígido

El momento angular para un cuerpo rígido es la suma del momentum angular para cada partícula dentro del cuerpo rígido como se ilustra en la fig. ??

$$\mathbf{L}_{\text{total}} = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i \quad (7.31)$$

Usando la relación entre las coordenadas con respecto a una sistema externo y las coordenadas del centro de masa

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i, \quad (7.32)$$

$$\mathbf{L}_{\text{total}} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{R} + \mathbf{r}'_i) \times m_i (\dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{r}}'_i) \quad (7.33)$$

Analicemos término a término

1.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \mathbf{R} \times m_i \dot{\mathbf{R}} &= \mathbf{R} \times \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \dot{\mathbf{R}} \\ &= \mathbf{R} \times M\mathbf{V} \\ &= \mathbf{R} \times \mathbf{P} \\ &= \mathbf{L}_{\text{orb}}, \end{aligned}$$

donde \mathbf{P} es el momento lineal total del cuerpo rígido con respecto al centro de masa y el momento angular orbital, \mathbf{L}_{orb} , es momento angular ocasionado por las fuerzas externas al cuerpo rígido

2.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{R}} &= \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times \dot{\mathbf{R}} \\ &= \left(M \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{M} - M\mathbf{R} \right) \times \dot{\mathbf{R}} \\ &= (M\mathbf{R} - M\mathbf{R}) \times \dot{\mathbf{R}} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (7.34)$$

3.

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{R} \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = \mathbf{0}.$$

4.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}'_i \\ &= \mathbf{L}_0, \end{aligned}$$

donde hemos definido el momento angular intrínseco del cuerpo rígido \mathbf{L}_0

Entonces el momento angular total puede escribirse en el sistema de centro de masa, \mathbf{r}'_i , como

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\text{total}} &= \mathbf{L}_{\text{orb}} + \mathbf{L}_0 \\ &= \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i, \end{aligned} \quad (7.35)$$

Teorema: Desarrollando está expresión se puede obtener

$$\mathbf{L}_{\text{total}} = \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \mathbb{I}\boldsymbol{\omega}, \quad (7.36)$$

donde \mathbb{I} es el tensor de inercia.

Demostración

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{v}}'_i \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) \end{aligned}$$

Usando la identidad

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$$

tenemos para $\mathbf{A} = \mathbf{C} = \mathbf{r}'_i$ y $\mathbf{B} = \boldsymbol{\omega}$, que

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 &= \sum_{i=1}^N m_i [(\mathbf{r}'_i \cdot \mathbf{r}'_i) \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}'_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}'_i] \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left[(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) \boldsymbol{\omega} - (x_i' \omega_x + y_i' \omega_y + z_i' \omega_z) \mathbf{r}'_i \right]. \end{aligned}$$

En términos de componentes tenemos

$$\begin{aligned} L_{0x} &= \sum_{i=1}^N m_i \left[(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) \omega_x - (x_i' \omega_x + y_i' \omega_y + z_i' \omega_z) x_i' \right] \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left[(x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) \omega_x - (x_i'^2 \omega_x + x_i' y_i' \omega_y + x_i' z_i' \omega_z) \right] \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left[(y_i'^2 + z_i'^2) \omega_x - x_i' y_i' \omega_y - x_i' z_i' \omega_z \right] \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (y_i'^2 + z_i'^2) \omega_x - \sum_{i=1}^N m_i x_i' y_i' \omega_y - \sum_{i=1}^N m_i x_i' z_i' \omega_z. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Similarmente

$$\begin{aligned} L_{0y} &= \sum_{i=1}^N m_i (x_i'^2 + z_i'^2) \omega_y - \sum_{i=1}^N m_i y_i' x_i' \omega_x - \sum_{i=1}^N m_i y_i' z_i' \omega_z \\ L_{0z} &= \sum_{i=1}^N m_i (x_i'^2 + y_i'^2) \omega_z - \sum_{i=1}^N m_i z_i' x_i' \omega_x - \sum_{i=1}^N m_i z_i' y_i' \omega_y. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Las ecs. (7.37) y (7.38) pueden escribirse en forma matricial como de modo que \mathbb{I} , que definimos como el *tensor de inercia*, es una matriz 3×3 simétrica. Cada entrada de la matriz es una sumatoria de operaciones sobre coordenadas, de modo que el resultado es un número. En el caso continuo, cada entrada sería el resultado numérico de una integral definida

El momento angular alrededor del centro de masa es entonces

$$\mathbf{L}_0 = \mathbb{I}\boldsymbol{\omega}. \quad (7.39)$$

El momento angular puede entonces dividirse en dos partes

- \mathbf{L}_0 : Momento angular debido a la rotación del cuerpo sobre su centro de masa
- \mathbf{L}_{orb} : Momento angular debido al movimiento del centro de masa con respecto al origen del sistema inercial de coordenadas.

7.4. Principio de Momento Angular

Definimos el torque sobre un cuerpo rígido como la derivada temporal de su momento angular:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}_{\text{total}}}{dt}. \quad (7.40)$$

Esta ecuación define el *Principio de Momento Angular*.

Tomando la derivada temporal en la ec. (7.35), y usando

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i, \quad (7.41)$$

tenemos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \\ &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}'_i + \mathbf{R}) \times \mathbf{F}_i \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i + \mathbf{R} \times \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i + \mathbf{R} \times \mathbf{F}, \end{aligned} \quad (7.42)$$

El primer termino corresponde al torque sobre el centro de masa debido a las diversas fuerzas externas, y el segundo término es el torque debido a la fuerza externa total actuando sobre el centro de masa

Similarmente, tomando la derivada de la expresión para el moméntum en la ec. (7.36)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \mathbb{I} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \mathbf{R} \times M \frac{d\mathbf{V}}{dt} \\ &= \mathbb{I}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{R} \times M\mathbf{A}. \end{aligned} \quad (7.43)$$

donde $\boldsymbol{\alpha}$ es la aceleración angular y \mathbf{A} es la aceleración del centro de masa.

7.4.1. Conservación del momento angular

Como los torques de los pares de fuerzas de acción reacción son iguales y opuestos, entonces al torque neto sobre un sistema de partículas sólo contribuyen las fuerzas externas

La ec. (7.40) la podemos escribir más explícitamente como

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{neto}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \quad (7.44)$$

Podemos observar que si el torque neto alrededor de una localización A es cero, el momento angular sobre esa localización no cambia.

Pueden existir fuerzas actuando, causando cambios en el momento lineal, pero si las fuerzas no ejercen ningún torque, la tasa de cambio del momento angular es cero y se conserva. Por ejemplo en el caso de la interacción de dos cuerpos que se mueven bajo el efecto de una fuerza con sólo componente radial, la cual no ejerce torques, entonces el momento angular del sistema se debe conservar. Este es el caso de las orbitas planetarias.

7.5. Energía cinética rotacional

Expresando la energía cinética de un cuerpo rígido

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2, \quad (7.45)$$

en la coordenadas del centro de masa, tenemos

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{v}_i|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\mathbf{v}'_i + \mathbf{V}'|^2. \end{aligned} \quad (7.46)$$

El producto escalar cruzado de

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{V}' = 0,$$

si se sigue el mismo análisis que en la ec. (7.34).

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}'_i \\ &= \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i) \cdot \mathbf{v}'_i, \end{aligned}$$

Usando la identidad

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}), \quad (7.47)$$

tenemos

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i) \\ &= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \left(\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i \right) \\ &= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}_0 \\ &= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbb{I} \boldsymbol{\omega}). \end{aligned} \quad (7.48)$$

Cuando \mathbf{L}_0 y $\boldsymbol{\omega}$ están referidos a los ejes principales de inercia

$$\mathbf{L}_0 = \mathbb{I} \boldsymbol{\omega} = (I_1 \omega_1, I_2 \omega_2, I_3 \omega_3), \quad (7.49)$$

y

$$K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3 \omega_3^2. \quad (7.50)$$

7.6. Teorema de los ejes paralelos

Sea I_0 el momento de inercia sobre un eje pasando por el centro de masa de un cuerpo de masa M . El momento de inercia sobre un eje paralelo a I_0 es

$$I = I_0 + Ml^2, \quad (7.51)$$

donde l es la distancia entre los ejes.

Demostración La ecuación que relaciona las coordenadas en el sistema de centro de masa para una partícula del cuerpo rígido es

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &= \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i \\ (x_i, y_i, z_i) &= (x'_i, y'_i, z'_i) + (R_x, R_y, R_z) \\ \boldsymbol{\rho}_i + z_i \hat{\mathbf{k}} &= \boldsymbol{\rho}'_i + z'_i \hat{\mathbf{k}} + \mathbf{R}_T + R_z \hat{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Igualando las componentes transversales tenemos

$$\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{R}_T + \boldsymbol{\rho}'_i \quad (7.53)$$

La interpretación de los vectores transversos se basa en la figura ??

Es claro que

$$I_0 = \sum_i m_i \rho_i'^2. \quad (7.54)$$

Para obtener el momento de inercia alrededor de un eje paralelo al del centro de masa, primero hacemos coincidir el eje z el nuevo eje de giro. Elevando al cuadrado y sumando sobre todas masas

$$I = \sum_i m_i \rho_i^2 = \sum_i m_i (\mathbf{R}_T + \rho'_i)^2, \quad (7.55)$$

el producto cruzado de nuevo es cero por la definición de centro de masa

$$\begin{aligned} I &= \sum_i m_i \rho_i^2 = \sum_i m_i \mathbf{R}_T^2 + \sum_i m_i \rho_i'^2 \\ &= M \mathbf{R}_T^2 + \sum_i m_i \rho_i'^2. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Usando el momento de inercia alrededor del centro dado en la ec. (7.54) y definiendo $l = |\mathbf{R}_T|$, es decir, la distancia entre los ejes, tenemos finalmente que

$$I = I_0 + Ml^2, \quad (7.57)$$

□

7.7. Resumen

1. Rotación pura sobre un eje sin traslación

$$\begin{aligned} L &= I\omega \\ \tau &= I\alpha \\ K &= \frac{1}{2}I\omega^2. \end{aligned} \quad (7.58)$$

2. Rotación y traslación sobre un eje z (el subíndice cero se refiere al centro de masa)

$$\begin{aligned} L_z &= I_0\omega + (\mathbf{R} \times M\mathbf{V})_z \\ \tau_z &= \tau_0 + (\mathbf{R} \times \mathbf{F})_z \\ \tau_0 &= I_0\alpha \\ K &= \frac{1}{2}I_0\omega^2 + \frac{1}{2}MV^2. \end{aligned} \quad (7.59)$$

7.8. Ecuaciones de Euler

Suponga un sistema rotando a través de sus tres ejes principales, de modo que las componentes de \mathbf{L} son

$$\mathbf{L} = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3) \quad (7.60)$$

Hay dos formas en las cuales L_1 puede cambiar: por cambios en ω_1 , o cambios en L_2 y L_3 . Fijemos las posible rotaciones a lo largo de los ejes en el sentido de la mano derecha, como se muestra en la figura ???. Entonces

$$\Delta L_1 = I_1\Delta\omega_1 + \Delta(L_2) + \Delta(L_3). \quad (7.61)$$

Consideremos primero la rotación sobre el eje principal 2. Esta induce un cambio en el momento angular L_1 que contribuye a la ec. (7.61) como

$$\begin{aligned}\Delta L_1 &= I_1 \Delta \omega_1 + L_3 \sin(\Delta \theta_2) + \Delta(L_3) \\ &= I_1 \Delta \omega_1 + I_3 \omega_3 \Delta \theta_2 + \Delta(L_3).\end{aligned}\quad (7.62)$$

Similarmente, una rotación sobre el eje principal 3

$$\Delta L_1 = I_1 \Delta \omega_1 + I_3 \omega_3 \Delta \theta_2 - I_2 \omega_2 \Delta \theta_3. \quad (7.63)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta L_1}{\Delta t} = I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3. \quad (7.64)$$

Repitiendo el mismo proceso para L_2 y L_3 obtenemos las ecuaciones de Euler para el movimiento del cuerpo rígido

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{dL_1}{dt} = I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 \\ \tau_2 &= \frac{dL_2}{dt} = I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 \\ \tau_3 &= \frac{dL_3}{dt} = I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1.\end{aligned}\quad (7.65)$$

7.8.1. Estabilidad del movimiento rotacional

$$\omega_1 \neq 0 \qquad \omega_2 = 0 \qquad \omega_3 = 0, \quad (7.66)$$

después de una pequeña perturbación

$$\begin{aligned}\omega_2 &\neq 0, & \omega_3 &\neq 0, & \text{pero} \\ \omega_2 &\ll \omega_1, & \omega_3 &\ll \omega_1.\end{aligned}\quad (7.67)$$

Una vez la perturbación termina, el movimiento es libre de torques. Las ecuaciones de Euler para la rotación libre de torques se reducen a

$$\begin{aligned}I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 &= 0 \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 &= 0.\end{aligned}\quad (7.68)$$

Usando las condiciones para una pequeña perturbación se tiene que en la primera ecuación

$$\begin{aligned}I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ \frac{d\omega_1}{dt} &= 0,\end{aligned}\quad (7.69)$$

De modo que ω_1 es constante. Sacando derivada con respecto a la segunda ecuación del sistema (7.68), y teniendo en cuenta que ω_1 es constante

$$I_2 \frac{d^2 \omega_2}{dt^2} + (I_1 - I_3) \frac{d\omega_1}{dt} \omega_3 + (I_1 - I_3) \omega_1 \frac{d\omega_3}{dt}, \quad (7.70)$$

Reemplazando finalmente la tercera ecuación del sistema (7.68) para $d\omega_3/dt$,

$$I_2 \frac{d^2 \omega_2}{dt^2} + \frac{(I_1 - I_3)(I_2 - I_1)\omega_1^2}{I_3} \omega_2 = 0, \quad (7.71)$$

que podemos escribir como

$$\frac{d^2 \omega_2}{dt^2} + A \omega_2 = 0, \quad (7.72)$$

donde

$$A = \frac{(I_1 - I_2)(I_1 - I_3)}{I_2 I_3} \omega_1^2. \quad (7.73)$$

Si $A > 0$ tenemos una solución oscilatoria, que corresponde a un movimiento de precesión a lo largo del eje 1, el cual es un movimiento rotacional estable.

De otro lado, si $A < 0$, se propone la solución

$$\omega_2 = C \exp(\alpha t) \quad (7.74)$$

(donde C es una constante por especificar). Reemplazando en (7.72)

$$\begin{aligned} \alpha^2 \omega_2 + A \omega_2 &= 0 \\ \alpha &= \sqrt{-A}, \end{aligned} \quad (7.75)$$

de modo que la solución final es

$$\omega_2 = C \exp(\sqrt{-A} t) \quad A < 0, \quad (7.76)$$

de modo que w_2 (y similarmente ω_3) se incrementa exponencialmente con el tiempo, dando lugar a un movimiento inestable.

El movimiento estable, es decir con $A > 0$, cuando $I_1 = I_{\max}$ ó si $I_1 = I_{\min}$. El movimiento es inestable, es decir con $A < 0$, cuando I_1 es el momento de inercia intermedio.

Ejemplo 7.8.1. Tomado de [2]: Un disco con momento de inercia sobre el centro de masa I_{cm} rota en un plano horizontal. Está suspendido por una varilla delgada de masa despreciable. Si el disco se rota fuera de su posición de equilibrio por un ángulo θ , la varilla ejerce una torque restaurador dado por $\tau_{\text{cm}} = -\gamma\theta$. En $t = 0$ el disco es liberado desde el reposo con un desplazamiento angular de θ_0 . Encuentre la subsecuente dependencia temporal del desplazamiento angular $\theta(t)$

Escojamos un sistema de coordenadas tal que $\hat{\mathbf{k}}$ apunte hacia arriba. La componente $\hat{\mathbf{k}}$ de la ecuación de torque

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{cm}} = I_{\text{cm}} \boldsymbol{\alpha}, \quad (7.77)$$

es

$$-\gamma\theta = I_{\text{cm}} \frac{d^2\theta}{dt^2}. \quad (7.78)$$

o

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\gamma}{I_{\text{cm}}}\theta = 0. \quad (7.79)$$

Esto es una ecuación de un oscilador armónico simple con solución

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t). \quad (7.80)$$

Donde la frecuencia de oscilación está dada por

$$\omega_0 = \sqrt{\gamma/I_{\text{cm}}}. \quad (7.81)$$

La componente z de la velocidad angular está dada por

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \sin(\omega_0 t). \quad (7.82)$$

Las condiciones iniciales en $t = 0$, son que $\theta(t = 0) = A = \theta_0$, y $d\theta/dt = 0 = \omega_0 B$, de donde $B = 0$. Entonces

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\gamma/I_{\text{cm}}}t\right). \quad (7.83)$$

□

7.9. Cálculo de momentos de inercia

7.9.1. Varilla uniforme

Masa m y longitud L

$$\frac{1}{12}mL^2 \quad (7.84)$$

7.9.2. Disco uniforme

Masa M y radio R

$$I_{\text{CM}} = \frac{1}{2}MR^2 \quad (7.85)$$

7.9.3. Cilindro uniforme

Masa M y radio R

$$I_{\text{CM}} = \frac{3}{2}MR^2 \quad (7.86)$$

7.9.4. Esfera

Masa M y radio R

$$I_{\text{CM}} = \frac{2}{5}MR^2 \quad (7.87)$$

7.10. Movimiento de rodadura sin deslizamiento

Si un sistema formado por un cuerpo rígido simétrico rueda sin deslizar, el movimiento de rodadura se puede considerar como la suma de una traslación del centro de masa y una rotación pura alrededor del centro de masa. Entonces, podemos hacer una reducción en el punto de contacto de forma que el movimiento de rodadura es equivalente a una rotación pura aplicada en el punto de contacto P

Para ilustrar estos conceptos, consideremos un cuerpo uniforme que rueda sin deslizar sobre su eje de simetría por un plano inclinado por un ángulo θ . Ver figura ???. Vamos a calcular la aceleración del cuerpo.

Las ecuación de movimiento será obtenida con respecto a un sistema de referencia en el centro de masa ¹. Entonces los torques se deben tomar con respecto al centro de masa. Tomemos el eje x paralelo al plano inclinado.

Primero consideraremos el movimiento del cuerpo como una traslación y una rotación. En tal caso se deben cumplir las ecuaciones de la dinámica de traslación

1. Sumatoria de fuerzas en x

$$Mg \sin \theta - f = Ma_c. \quad (7.88)$$

2. Sumatoria de fuerzas en y

$$Mg \cos \theta - N = 0.$$

y la dinámica de rotación. Es decir, el torque con respecto al centro de masa.

$$Rf = I_{\text{CM}}\alpha. \quad (7.89)$$

Sin embargo vemos que la ecuación para la sumatoria de fuerzas en y no es necesaria pues sólo se requieren dos ecuaciones para las dos incógnitas f y a_c , una vez tenemos en cuenta la ecuación de ligadura

$$a_c = R\alpha. \quad (7.90)$$

Ahora consideremos el movimiento del cuerpo como una rotación pura si nos centramos en el *eje instantáneo de rotación*: un eje perpendicular que pasa por el punto de contacto P .

$$\begin{aligned} R \sin \theta Mg &= I_p \alpha \\ &= (I_{\text{CM}} + MR^2)\alpha. \end{aligned}$$

¹Aunque puede parecer que dicho sistema no es inercial, podemos considerar el sistema completo cuerpo y resto de la tierra y despreciar el movimiento de la tierra ocasionado por el bloque

La ecuación de ligadura (7.90) es la misma en ambos casos.

Para ver que las dos formas de abordar el problema son equivalentes, podemos reemplazar (7.88) en (7.89) y usar (7.90)

$$\begin{aligned} R(Mg \sin \theta - Ma_c) &= I_{\text{CM}} \alpha \\ RMg \sin \theta &= I_{\text{CM}} \alpha + MRa_c \\ R \sin \theta Mg &= I_{\text{CM}} \alpha + MR^2 \alpha \\ R \sin \theta Mg &= (I_{\text{CM}} + MR^2) \alpha. \end{aligned}$$

Podemos entonces ver que la opción de usar el eje de rotación instantáneo, combinado con el teorema de ejes paralelos, permiten simplificar significativamente el problema.

Podemos entonces encontrar la aceleración angular del cuerpo

$$\alpha = \frac{R \sin \theta Mg}{I_{\text{CM}} + MR^2}, \quad (7.91)$$

y la correspondiente aceleración

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{R^2 \sin \theta Mg}{I_{\text{CM}} + MR^2} \\ &= \frac{\sin \theta}{M + I_{\text{CM}}/R^2} Mg. \end{aligned} \quad (7.92)$$

Mientras existe rodadura (rueda sin deslizar) el suelo ejerce una fuerza de rozamiento sobre la esfera, es una fuerza de rozamiento estática $f \leq \mu N$, y no hay disipación de energía mecánica. Por lo tanto en el movimiento de rodadura la energía mecánica se conserva.

De hecho, aplicando la conservación de la energía, y asumiendo que el cuerpo parte del reposo (sistema de referencia en el piso)

$$\begin{aligned} Mgy &= \frac{1}{2} Mv_c^2 + \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2 \\ &= \frac{1}{2} Mv_c^2 + \frac{1}{2R^2} I_{\text{CM}} v_c^2 \\ &= \frac{1}{2} (M + I_{\text{CM}}/R^2) v_c^2. \end{aligned}$$

asumiendo que el cuerpo recorre una distancia h asociada con la altura vertical y , y considerando que

$$v_c^2 = 2a_c h,$$

entonces

$$\begin{aligned} Mgh \sin \theta &= \frac{1}{2} v_c^2 (M + I_{\text{CM}}/R^2) \\ 2\mathcal{K} \sin \theta Mg &= 2\mathcal{K} a_c (M + I_{\text{CM}}/R^2) \\ \sin \theta Mg &= (M + I_{\text{CM}}/R^2) a_c, \end{aligned}$$

y obtenemos de nuevo la ecuación para la aceleración (7.92):

$$a_c = \frac{\sin \theta}{M + I_{\text{CM}}/R^2} Mg.$$

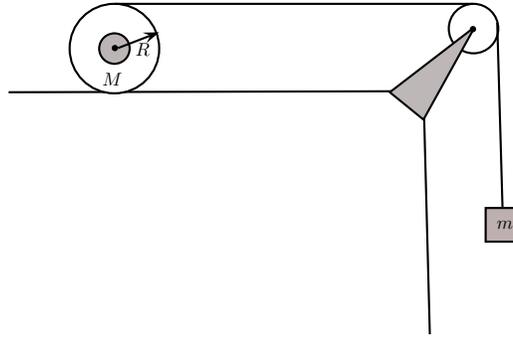


Figura 7.1: Cilindro

Ejercicio 7.10.1. Calcular el ángulo crítico para el cual un cuerpo inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal comienza a deslizar. Ayuda: ver

Ejemplo 7.10.1. Un cilindro de radio R y masa M rueda sin deslizar a lo largo de una superficie debido a una cinta delgada enrollada en torno de él, que pasa por una polea ideal y está conectada a un bloque de masa m como se muestra en la figura 7.1. Un estudiante obtiene la siguiente respuesta para la aceleración del cuerpo:

$$a_{\text{CM}} = \frac{4mg}{8m - 3M}.$$

Justifique porqué dicha respuesta es incorrecta.

Solución: El cilindro podría moverse hacia la izquierda o con una aceleración infinita.

7.11. Problemas resueltos

Ejemplo 7.11.1. Tomado de [2]. Considere una polea de masa m_p , radio R , y momento de inercia I_{cm} sobre su centro de masa en uno de los lados de una mesa. Una cuerda inextensible de masa despreciable pasa a través de la polea y esta unida en uno de sus extremos al bloque 1 que cuelga sobre un lado de la mesa. El otro extremo está unido al bloque 2 que se desliza a lo largo de la mesa. Ver Figura 7.2. El coeficiente de fricción cinética entre la masa y el bloque 2 es μ_k . El bloque 1 tiene una masa m_1 y el bloque 2 tiene una masa m_2 , con $m_1 > \mu_k m_2$. En el tiempo $t = 0$, los bloques son liberados desde el reposo y la cuerda no se desliza alrededor de la polea, En el tiempo $t = t_1$, el bloque 1 golpea el piso.

1. Encuentre la magnitud de la aceleración de cada bloque. Exprese su respuesta en términos de m_p , I_{cm} , R , m_1 , m_2 , μ_k , y t_1
2. ¿Cuanto cae el bloque 1 antes de tocar el piso?

1. Escogemos el sistema de referencia tal que los ejes x y y coinciden con el plano de movimiento con x hacia la derecha y y hacia abajo, de modo que el eje z este entrando a ese plano.

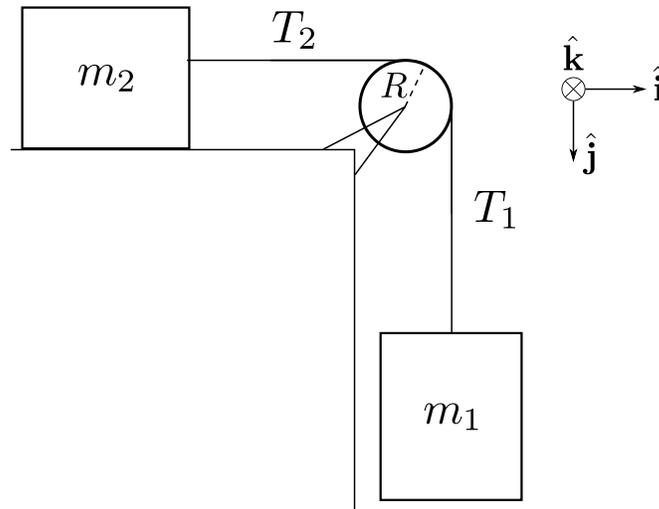


Figura 7.2: Polea física

Entonces, el torque sobre el centro de la polea esta dado por

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\tau}_2 + \boldsymbol{\tau}_1 &= I_{\text{cm}} \alpha_z \hat{\mathbf{k}} \\
 R(-\hat{\mathbf{j}})T_2(-\hat{\mathbf{i}}) + R\hat{\mathbf{i}}T_1\hat{\mathbf{j}} &= I_{\text{cm}} \alpha_z \hat{\mathbf{k}} \\
 RT_2(-\hat{\mathbf{k}}) + RT_1\hat{\mathbf{k}} &= I_{\text{cm}} \alpha_z \hat{\mathbf{k}},
 \end{aligned} \tag{7.93}$$

de modo que

$$R(T_1 - T_2) = I_{\text{cm}} \alpha_z. \tag{7.94}$$

La segunda ley de Newton sobre el bloque 1 da lugar a

$$m_1 g - T_1 = m_1 a. \tag{7.95}$$

La segunda ley de Newton sobre el bloque 2 en la dirección $\hat{\mathbf{j}}$, da lugar a

$$N - m_2 g = 0. \tag{7.96}$$

La segunda ley de Newton sobre el bloque 2 en la dirección $\hat{\mathbf{i}}$, da lugar a

$$\begin{aligned}
 T_2 - f_k &= m_2 a \\
 T_2 - \mu_k N &= m_2 a \\
 T_2 - \mu_k m_2 g &= m_2 a.
 \end{aligned} \tag{7.97}$$

Solucionando las ecs. (7.95) y (7.97) para las dos tensiones da lugar a

$$\begin{aligned}
 T_1 &= m_1 g - m_1 a \\
 T_2 &= \mu_k m_2 g + m_2 a.
 \end{aligned} \tag{7.98}$$

El punto en el borde de la polea tiene una aceleración tangencial que es igual a la aceleración de los bloques, de modo que

$$a = R\alpha_z. \quad (7.99)$$

La ec. (7.94) se puede reescribir como

$$T_1 - T_2 = \frac{I_{\text{cm}}}{R^2}a. \quad (7.100)$$

Sustituyendo la ec. (7.98) en la ec. (7.100) tenemos

$$m_1g - m_1a - \mu_k m_2g - m_2a = \frac{I_{\text{cm}}}{R^2}a, \quad (7.101)$$

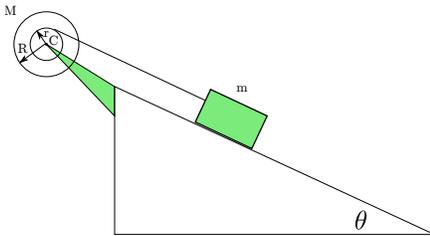
de la cual podemos despejar la aceleración

$$\begin{aligned} -m_1a - m_2a - \frac{I_{\text{cm}}}{R^2}a &= -m_1g + \mu_k m_2g \\ \left(m_1 + m_2 + \frac{I_{\text{cm}}}{R^2}\right)a &= m_1g - \mu_k m_2g \\ a &= \frac{m_1g - \mu_k m_2g}{m_1 + m_2 + I_{\text{cm}}/R^2}. \end{aligned} \quad (7.102)$$

2. El bloque 1 golpea el piso después de un tiempo t_1 , por consiguiente viaja una distancia

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}at_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{m_1g - \mu_k m_2g}{m_1 + m_2 + I_{\text{cm}}/R^2} \right) t_1^2. \end{aligned} \quad (7.103)$$

Ejemplo 7.11.2. (Tomado de [8]) Un bloque de masa m desliza por la superficie del plano inclinado de ángulo θ , mostrado en la figura. El coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie es μ . Por la acción de la cuerda, el cilindro macizo de masa M y radio R gira alrededor de un eje fijo que pasa por C . La cuerda está enrollada alrededor de un pequeño saliente de radio $r = 0.1$ m. Desprecie la fricción entre el volante y el eje alrededor del cual gira.



1. Haga el diagrama de fuerzas que actúan sobre cada uno de los cuerpos.
2. Escriba las ecuaciones de movimiento para estos cuerpos.
3. Encuentre la tensión en la cuerda, la aceleración angular del volante y la aceleración del bloque.
4. Hallar la energía cinética rotacional del sistema cuando el bloque ha recorrido una distancia h .
5. Finalmente, calcule las cantidades anteriores para el caso particular de $m = 5$ Kg, $\mu = 0.25$, $M = 20$ Kg, $R = 0.2$ m $r = 0.1$ m, $\theta = 37^\circ$

Solución

2 Para la polea, si el eje z apunta hacia afuera de la página:

$$\begin{aligned}\tau &= I\alpha \\ -rT &= -I_c\alpha.\end{aligned}$$

Para el bloque

$$\begin{aligned}mg \sin \theta - T - \mu N &= ma \\ N &= mg \cos \theta.\end{aligned}$$

3 Usando la ligadura

$$a = r\alpha,$$

Tenemos

$$T = \frac{I_c}{r^2}a$$

y sustituyendo en la ecuación de movimiento para el bloque

$$mg \sin \theta - \frac{I_c}{r^2}a - \mu mg \cos \theta = ma,$$

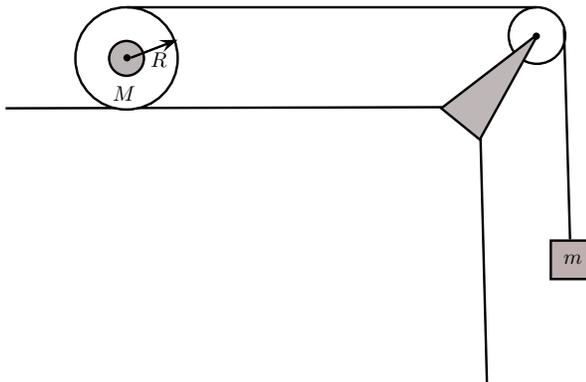
podemos despejar a

$$\begin{aligned}a(m + I_c/r^2) &= mg(\sin \theta - \mu \cos \theta) \\ a &= \frac{mg(\sin \theta - \mu \cos \theta)}{m + I_c/r^2} \\ &= \frac{mg(\sin \theta - \mu \cos \theta)}{m + MR^2/(2r^2)} \\ &= \frac{2r^2 mg(\sin \theta - \mu \cos \theta)}{2r^2 m + MR^2},\end{aligned}$$

y reemplazando de nuevo en T

$$T = \frac{MR^2}{2r^2}a.$$

Ejemplo 7.11.3. Un cilindro de radio R y masa M rueda sin deslizar a lo largo de una superficie debido a una cinta delgada enrollada en torno de él, que pasa por una polea ideal y está conectada a un bloque de masa m como se muestra en la figura.



1. Haga un diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo.
2. Plantee las ecuaciones de movimiento para cada cuerpo.
3. Halle la aceleración del cilindro y la aceleración del bloque
4. Calcule la tensión en la cuerda para $M = 1 \text{ kg}$, $m = 750 \text{ g}$

2. Para el cilindro y tomando los torques con respecto al punto de contacto con la superficie, P

$$2RT = I_P \alpha,$$

Para el cuerpo

$$T - mg = -ma.$$

3. La aceleración del cilindro a_{CM} , la aceleración angular α , y la aceleración a del bloque están relacionadas por

$$a = 2\alpha R = 2a_{\text{CM}}$$

Entonces, de la ecuación de movimiento para el cilindro

$$\begin{aligned} a_{\text{CM}} &= \alpha R \\ &= \frac{2R^2 T}{I_P} \end{aligned}$$

y para el cuerpo

$$\begin{aligned} a &= \frac{mg - T}{m} \\ a_{\text{CM}} &= \frac{a}{2} = \frac{mg - T}{2m} \\ &= \frac{g}{2} - \frac{T}{2m}. \end{aligned}$$

Igualando las expresiones podemos obtener la tensión

$$\begin{aligned} \frac{2R^2 T}{I_P} &= \frac{g}{2} - \frac{T}{2m} \\ T \left(\frac{2R^2}{I_P} + \frac{1}{2m} \right) &= \frac{g}{2} \\ T (4mR^2 + I_P) &= I_P mg \\ T &= \frac{I_P mg}{4mR^2 + I_P} \end{aligned}$$

finalmente, reemplazando en la primera expresión para a_{CM}

$$\begin{aligned} a_{\text{CM}} &= \frac{2R^2}{I_P} \frac{I_P mg}{4mR^2 + I_P} \\ &= \frac{mg}{2m + I_P/(2R^2)} \\ &= \frac{mg}{2[m + I_P/(2R^2)]}. \end{aligned} \tag{7.104}$$

En términos del momento de inercia para el centro de masa tenemos entonces que la aceleración del cilindro es

$$\begin{aligned} a_{\text{CM}} &= \frac{mg}{2[m + (I_{\text{CM}} + MR^2)/(2R)^2]} \\ &= \frac{mg}{2(4mR^2 + I_{\text{CM}} + MR^2)/(4R^2)} \\ &= \frac{2R^2mg}{4mR^2 + MR^2 + I_{\text{CM}}}, \end{aligned}$$

Reemplazando finalmente la expresión para el momento de Inercia de un cilindro con respecto al centro de masa dada en la ec. (7.86), tenemos

$$\begin{aligned} a_{\text{CM}} &= \frac{2R^2mg}{4mR^2 + MR^2 + 3MR^2/2} \\ &= \frac{2R^2mg}{4mR^2 + MR^2 + 3MR^2/2} \\ &= \frac{4mg}{8m + 2M + 3M} \\ &= \frac{4mg}{8m + 5M}, \end{aligned}$$

Por conservación de la energía, si m cae una distancia h y tomando el origen del sistema de referencia en la altura final, tenemos que tomando la conservación de la energía mecánica con respecto al eje instantáneo de giro en el punto de contacto P

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}I_P \omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 & (7.105) \\ mgh &= \frac{1}{2}I_P \left(\frac{v}{2R}\right)^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ mgh &= \frac{1}{2} \left[\frac{I_P}{(2R)^2} + m \right] v^2 \\ mg\mathcal{H} &= \frac{1}{2} \left[\frac{I_P}{(2R)^2} + m \right] (2a\mathcal{H}) \end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$a = \frac{mg}{m + I_P/(2R)^2} = 2a_{\text{CM}},$$

Obteniendo la misma expresión para la a_{CM} en la ec. (7.104):

$$a_{\text{CM}} = \frac{mg}{2[m + I_P/(2R)^2]},$$

Si tomamos la conservación de la energía mecánica con respecto a un eje que pase por el centro de masa del cilindro, entonces también debemos considerar la energía de traslación del centro

de masa del cilindro

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ mgh &= \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ mgh &= \frac{1}{2}\left(I_{\text{CM}} + \frac{1}{2}MR^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ mgh &= \frac{1}{2}I_P\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2, \end{aligned}$$

que coincide con la ec. (7.105) para la conservación de la Energía mecánica con respecto al eje instantáneo. El paso de la penúltima a la última ecuación, ilustra muy bien el Teorema del eje paralelo.

Ejemplo 7.11.4. Tomado de [2]. Un péndulo físico consiste de una varilla uniforme de masa m_1 con un pivote en un extremo. La varilla tiene longitud l_1 y momento de inercia I_1 sobre el punto del pivote. Un disco de masa m_2 y radio r_2 con momento de inercia I_{cm} sobre su centro de masa está unido rígidamente a una distancia l_2 del punto de pivote. El péndulo está inicialmente desplazado a un ángulo θ_0 y entonces es liberado desde el reposo.

1. ¿Cual es el momento de inercia del péndulo físico sobre el punto de pivote?
2. ¿Cuan lejos del punto de pivote está el centro de masa del sistema?
3. ¿Cual es la velocidad angular del péndulo cuando el péndulo está en la parte de abajo de su oscilación?

1. El momento de inercia sobre el punto de pivote será la suma del momento de inercia de la varilla, dada por I_1 , y el momento de inercia del disco sobre el punto de pivote. El momento de inercia del disco sobre el punto de pivote se encuentra a partir del teorema de los ejes paralelos:

$$I_{\text{disc}} = I_{\text{cm}} + m_2l_2^2. \quad (7.106)$$

El momento de inercia total sobre el punto de pivote es entonces

$$I_S = I_1 + I_{\text{disc}} = I_1 + I_{\text{cm}} + m_2l_2^2. \quad (7.107)$$

2. El centro de masa del sistema compuesto esta localizado a una distancia del punto de pivote dada por

$$l_{\text{cm}} = \frac{m_1(l_1/2) + m_2l_2}{m_1 + m_2} \quad (7.108)$$

3. Podemos usar la conservación de la energía mecánica, para encontrar la velocidad angular del péndulo en la parte de abajo de su oscilación.

Tomando el punto de energía potencial gravitacional cero como el punto donde la parte de abajo de la varilla está en su posición más baja, esto es, $\theta = 0$, tenemos que la energía mecánica inicial es (ver Figura 7.3)

$$E_0 = U_0 = m_1g\left(l_1 - \frac{l_1}{2}\cos\theta_0\right) + m_2g(l_1 - l_2\cos\theta_0) \quad (7.109)$$

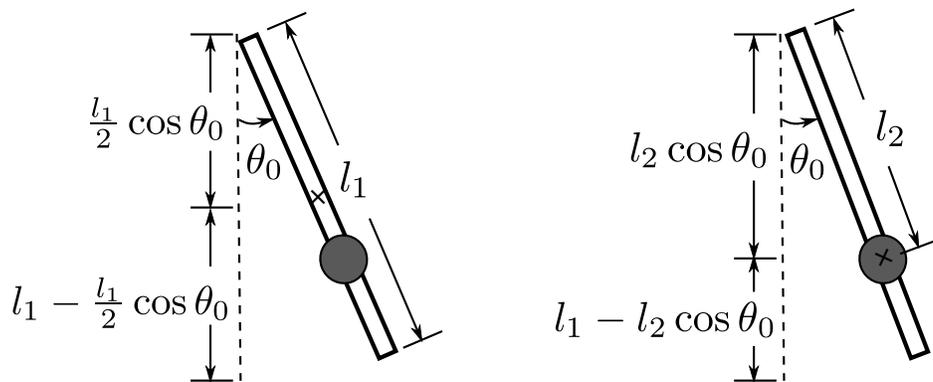


Figura 7.3: Energía potencial inicial del péndulo físico

La energía mecánica final es

$$E_f = U_f + K_f = m_1 g \frac{l_1}{2} + m_2 g (l_1 - l_2) + \frac{1}{2} I_S \omega_f^2. \quad (7.110)$$

Igualando las energías iniciales y finales

$$\begin{aligned} m_1 g \left(l_1 - \frac{l_1}{2} \cos \theta_0 \right) + m_2 g (l_1 - l_2 \cos \theta_0) &= m_1 g \frac{l_1}{2} + m_2 g (l_1 - l_2) + \frac{1}{2} I_S \omega_f^2 \\ m_1 g \left(l_1 - \frac{l_1}{2} \cos \theta_0 \right) - m_1 g \frac{l_1}{2} - m_2 g (l_1 - l_2) + m_2 g (l_1 - l_2 \cos \theta_0) &= \frac{1}{2} I_S \omega_f^2 \\ m_1 g \left(l_1 - \frac{l_1}{2} \cos \theta_0 \right) - m_1 g \frac{l_1}{2} - \cancel{m_2 g l_1} + \cancel{m_2 g l_1} + m_2 g l_2 - m_2 g l_2 \cos \theta_0 &= \frac{1}{2} I_S \omega_f^2 \\ m_1 g \left(\frac{l_1}{2} - \frac{l_1}{2} \cos \theta_0 \right) + m_2 g l_2 - m_2 g l_2 \cos \theta_0 &= \frac{1}{2} I_S \omega_f^2 \\ \frac{m_1 l_1}{2} g (1 - \cos \theta_0) + m_2 l_2 g (1 - \cos \theta_0) &= \frac{1}{2} I_S \omega_f^2 \\ \left(\frac{m_1 l_1}{2} + m_2 l_2 \right) g (1 - \cos \theta_0) &= \frac{1}{2} I_S \omega_f^2. \end{aligned} \quad (7.111)$$

Ahora solucionamos para ω_f (tomando la raíz cuadrada positiva para asegurar que estamos calculando la velocidad angular)

$$\omega_f = \sqrt{\frac{2 \left(\frac{m_1 l_1}{2} + m_2 l_2 \right) g (1 - \cos \theta_0)}{I_S}}. \quad (7.112)$$

Finalmente sustituyendo el resultado para I_S de la ec. (7.107)

$$\omega_f = \sqrt{\frac{2 \left(\frac{m_1 l_1}{2} + m_2 l_2 \right) g (1 - \cos \theta_0)}{I_1 + I_{\text{cm}} + m_2 l_2^2}}. \quad (7.113)$$

Note que podemos reescribir la ec. (7.111), usando la ecuación (7.108) para la distancia entre el centro de masa y el punto de pivote, y obtener

$$(m_1 + m_2) l_{\text{cm}} g (1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2} I_S \omega_f^2. \quad (7.114)$$

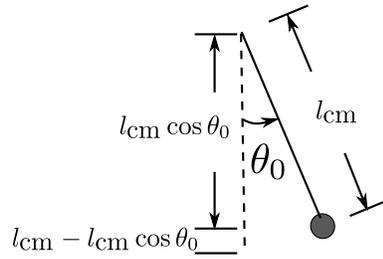


Figura 7.4: Sistema visto como un péndulo simple

Podemos interpretar esta ecuación como sigue. Trate el sistema compuesto como una partícula puntual de masa $m_1 + m_2$ localizada en el centro de masa l_{cm} . Tome el punto cero de energía potencial gravitacional para ser el punto donde el centro de masa está en su punto más bajo, esto es, en $\theta = 0$. Ver Figura 7.4. Entonces

$$E_0 = (m_1 + m_2)l_{\text{cm}}g(1 - \cos \theta_0) \quad (7.115)$$

y

$$E_f = \frac{1}{2}I_S\omega_f^2, \quad (7.116)$$

de modo que la ecuación (7.114) se puede obtener directamente de la conservación de la energía del sistema simplificado.

Ejemplo 7.11.5. Encuentre la ecuación de movimiento para un péndulo simple de longitud l usando la condición de conservación de la energía mecánica $dE/dt = 0$.

De la Figura. 7.4, reemplazando l_{cm} por l y considerando una posición genérica del péndulo formando un ángulo θ con la vertical podemos calcular la energía mecánica

$$\begin{aligned} E &= mlg(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}I\omega^2 \\ &= mlg(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2. \end{aligned} \quad (7.117)$$

El momento de inercia para el péndulo simple sobre un eje perpendicular al punto de pivote es

$$I = ml^2, \quad (7.118)$$

de modo que

$$E = mlg(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2. \quad (7.119)$$

Aplicando la condición de conservación de la energía mecánica tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= mlg\dot{\theta} \sin \theta + \frac{1}{2}ml^2 2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0 \\ mlg\dot{\theta} \sin \theta + ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} &= 0. \end{aligned} \quad (7.120)$$

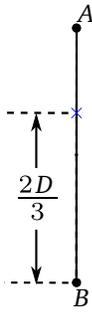


Figura 7.5: Sistema de dos partículas de masas diferentes unidos por una barra de masa despreciable.

Simplificando esta expresión, tenemos

$$\begin{aligned} l\ddot{\theta} + g \sin \theta &= 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta &= 0. \end{aligned} \quad (7.121)$$

Cuando las oscilaciones son pequeñas $\sin \theta \approx \theta$ y

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0. \quad (7.122)$$

Entonces el péndulo simple realiza un movimiento armónico simple con frecuencia:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (7.123)$$

Ejemplo 7.11.6. Tomado de [2]: Dos objetos puntuales están localizados en los puntos A y B , con masas $m_A = 2M$ y $m_B = M$, como se muestra en la figura 7.5. Una fuerza de magnitud F es aplicado a lo largo del eje x al objeto en B de la figura 7.5 en $t = 0$ por un intervalo de tiempo Δt . Despreciando la gravedad, de todas sus respuesta en términos de M y D .

1. Como se mueve el sistema después de aplicar la fuerza.

El sistema rota en el sentido antihorario alrededor del centro de masa, el cual se desplaza a su vez a velocidad constante en la dirección x .

2. Cuan lejos está el centro de masa del sistema desde el punto B .

Tomando el origen de coordenadas en el punto medio:

$$\mathbf{R} = \frac{m_A(D/2) - m_B(D/2)}{m_A + m_B} \hat{\mathbf{j}}. \quad (7.124)$$

$$\begin{aligned} R &= \frac{2M(D/2) - M(D/2)}{3M} \\ &= \frac{D - D/2}{3} \\ &= \frac{D}{6}, \end{aligned} \quad (7.125)$$

Desde el punto B

$$R_B = \frac{D}{2} + \frac{D}{6} = \frac{3D}{6} + \frac{D}{6} = \frac{4D}{6} = \frac{2D}{3}. \quad (7.126)$$

3. Cual es la magnitud y dirección de la velocidad del centro de masa

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \Delta t = \Delta \mathbf{P} &= m_{\text{total}}(\mathbf{V}_{\text{CM}} - \cancel{\mathbf{V}_{\text{CM}}^i}) \\ &= (2M + M)\mathbf{V}_{\text{CM}} \\ &= (3M)V_{\text{CM}}\hat{\mathbf{i}}. \end{aligned} \quad (7.127)$$

de modo que

$$\mathbf{V}_{\text{CM}} = \frac{F\Delta t}{3M}\hat{\mathbf{i}}. \quad (7.128)$$

4. Cual es la magnitud de la velocidad angular después la colisión:

$$\mathbf{L}_f = \mathbf{R} \times M\mathbf{V}_{\text{CM}} + \mathbf{L}_0, \quad (7.129)$$

donde \mathbf{L}_f es el momento angular final. Como el correspondiente momento angular inicial es cero

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{R} \times \mathbf{V}_{\text{CM}}^i, \quad (7.130)$$

pues la velocidad inicial del centro de masa es cero, y como el correspondiente torque en el punto B durante la aplicación de la fuerza es cero:

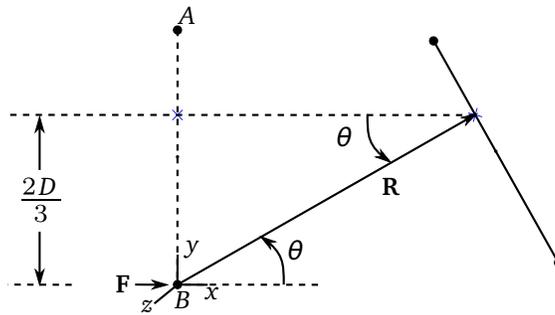
$$\boldsymbol{\tau}_B = \mathbf{0} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (7.131)$$

Por consiguiente el momento angular alrededor del punto B se conserva y

$$\mathbf{L}_f = \mathbf{L}_i = \mathbf{0}, \quad (7.132)$$

y reemplazando en la ec. (7.129), tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 &= -\mathbf{R} \times M\mathbf{V}_{\text{CM}} \\ &= -\mathbf{R} \times \mathbf{P} \\ &= -\mathbf{R} \times \mathbf{P} - \mathbf{P}_i \\ &= -\mathbf{R} \times \Delta \mathbf{P} \\ &= -\mathbf{R} \times \mathbf{F}\Delta t \end{aligned} \quad (7.133)$$

Figura 7.6: Producto vectorial $\mathbf{R} \times \mathbf{F}$

Para interpretar correctamente el producto vectorial $\mathbf{R} \times \mathbf{F}$ considere el diagrama en la fig. 7.6, donde \mathbf{R} es el que une el origen de coordenadas con el centro de masa. El ángulo entre los vectores \mathbf{R} y \mathbf{F} es θ , de modo que

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 &= -(R \sin \theta) F \Delta t (-\hat{\mathbf{k}}) \\ &= (R \sin \theta) F \Delta t \hat{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (7.134)$$

De la fig. 7.6 también tenemos que

$$R \sin \theta = \frac{2D}{3}, \quad (7.135)$$

de modo que

$$\mathbf{L}_0 = \frac{2D}{3} F \Delta t \hat{\mathbf{k}}. \quad (7.136)$$

De otro lado el momento angular alrededor del centro de masa satisface la ecuación de movimiento

$$\mathbf{L}_0 = I_{\text{CM}} \omega \hat{\mathbf{k}}, \quad (7.137)$$

donde, el momento de inercia sobre el centro de masa está dado por las distancias desde el centro de masa a cada una de las partículas:

$$\begin{aligned} I_{\text{CM}} &= m_A r_A'^2 + m_B r_B'^2 \\ &= 2M \left(\frac{D}{3}\right)^2 + M \left(\frac{2D}{3}\right)^2 \\ &= MD^2 \left(\frac{2}{9} + \frac{4}{9}\right) \\ &= \frac{6}{9} MD^2 \\ &= \frac{2D}{3} MD. \end{aligned} \quad (7.138)$$

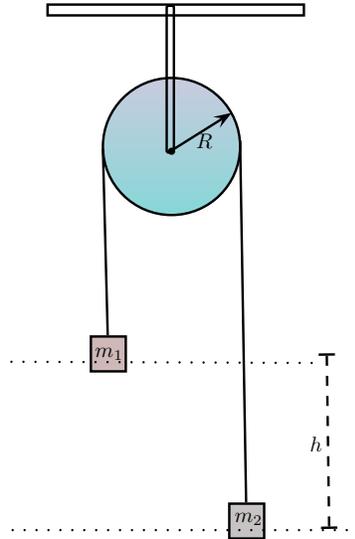


Figura 7.7: Ejemplo conservación de la energía

Reemplazando las ecs. (7.136) y (7.138) en (7.137), obtenemos

$$\frac{2D}{3}F\Delta t = \frac{2D}{3}MD\omega, \quad (7.139)$$

y despejando para la velocidad angular, obtenemos el resultado final

$$\omega = \frac{F\Delta t}{MD}. \quad (7.140)$$

□

Ejemplo 7.11.7. Ejemplo 27.7.4 (pag. 17) de [2]: **Cilindro rodando hacia abajo de un plano inclinado.**

7.12. Ejercicios

Ejercicio 7.12.1. Dos masas m_1 y m_2 unidas por una cuerda ideal están enrolladas en una polea de radio R y masa M que puede rotar alrededor de un eje fijo que pasa por el centro de la polea, tal como se muestra en la figura 7.7. Suponga que no hay fricción en el eje de la polea, que las dos masas están inicialmente en reposo, que $m_1 > m_2$ y que las dos masas están originalmente separadas una distancia h . Calcule la rapidez de cada una de las masas justamente cuando una pasa al lado de la otra, es decir, la rapidez de encuentro.

Capítulo 8

Fuerzas centrales

8.1. Problema de dos cuerpos

El problema de la interacción de dos cuerpos bajo el efecto de una fuerza central se puede solucionar analíticamente, transformando el problema de dos cuerpos a un problema equivalente de un sólo cuerpo. Desafortunadamente el método no puede ser generalizado. No hay forma de reducir el problema de tres o más partículas a uno equivalente de un sólo cuerpo, por está razón la solución del problema de tres cuerpos sólo puede hacerse numéricamente.

Considere un sistema aislado que conste de dos partículas interactuando bajo una fuerza central $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, como se ilustra en la figura 8.1

De la tercera ley de Newton tenemos que la fuerza que ejerce la partícula 2 sobre la partícula 1 es

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = F(r)\hat{\mathbf{r}}, \quad (8.1)$$

donde \mathbf{F}_{21} es la fuerza de reacción que ejerce la partícula 1 sobre la 2 y

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (8.2)$$

Las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{F}_{12} = \mathbf{F} = F(r)\hat{\mathbf{r}} \\ m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 &= \mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F} = -F(r)\hat{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

De las convenciones en la figura 8.1 para el caso de fuerzas atractivas podemos observar que la dirección de \mathbf{F}_{12} es opuesta al vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$, por lo tanto $F(r) < 0$. El caso $F(r) > 0$ corresponde a un par de fuerzas atractivas.

El problema se simplifica si reemplazamos las coordenadas \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 por \mathbf{r} y el vector de centro de masa \mathbf{R} , donde

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \\ M &= m_1 + m_2. \end{aligned} \quad (8.4)$$

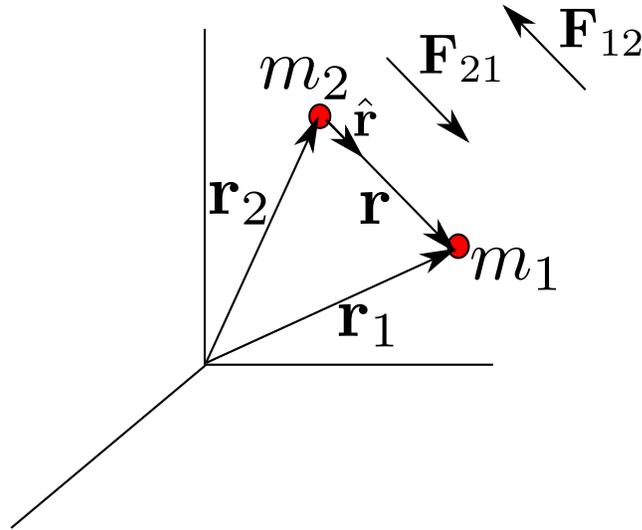


Figura 8.1: Fuerzas centrales atractivas

La ecuación de movimiento para \mathbf{R} es

$$\begin{aligned}
 M\ddot{\mathbf{R}} &= \frac{M}{M}(m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2) \\
 &= \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} \\
 &= \mathbf{F}_{12} - \mathbf{F}_{12} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{8.5}$$

Sobre la partícula equivalente de masa M y en la posición del centro de masa \mathbf{R} no tiene fuerzas externas actuando sobre ellas y por tanto se mueve a velocidad $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$ constante, con ecuación de movimiento

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}t. \tag{8.6}$$

Las constantes \mathbf{R}_0 y \mathbf{V} dependen de la escogencia del sistema de referencia y de las condiciones iniciales.

Para encontrar las ecuaciones de movimiento para \mathbf{r} usaremos la ec. (8.3)

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \frac{F(r)}{m_1}\hat{\mathbf{r}} \\
 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\frac{F(r)}{m_2}\hat{\mathbf{r}}.
 \end{aligned} \tag{8.7}$$

que al restarlas dan lugar a

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)F(r)\hat{\mathbf{r}} \\
 &= \frac{m_1 + m_2}{m_1m_2}F(r)\hat{\mathbf{r}} \\
 &= \frac{1}{\mu}F(r)\hat{\mathbf{r}},
 \end{aligned} \tag{8.8}$$

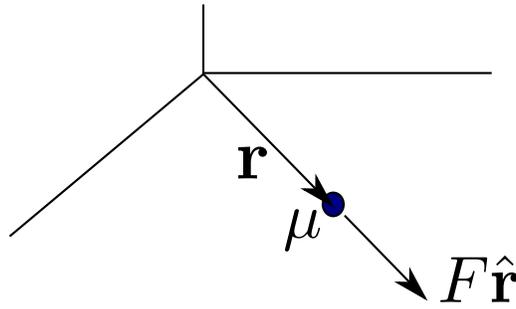


Figura 8.2: Reducción del problema de dos cuerpos al problema de un sólo cuerpo

donde hemos definido la masa reducida

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (8.9)$$

Además, derivando dos veces la ec. (8.2)

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2, \quad (8.10)$$

podemos escribir la ec. (8.8) como una ecuación de movimiento para una partícula de masa μ bajo el efecto de una fuerza $F(r)\hat{\mathbf{r}}$ como

$$F(r)\hat{\mathbf{r}} = \mu\ddot{\mathbf{r}}. \quad (8.11)$$

y el problema de dos cuerpos se reduce al problema de una sola partícula como se ilustra en la figura 8.2 El problema ahora es encontrar \mathbf{r} como una función del tiempo a partir de la ec. (8.11), pero esto no es posible sin antes especificar $F(r)$. Suponiendo que podemos encontrar \mathbf{r} , podemos encontrar \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 , usando las relaciones (8.2) y (8.4), solucionando para \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 . De (8.4)

$$(m_1 + m_2)\mathbf{R} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2, \quad (8.12)$$

y usando (8.2)

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\mathbf{R} &= m_1(\mathbf{r} + \mathbf{r}_2) + m_2\mathbf{r}_2 \\ (m_1 + m_2)\mathbf{R} &= m_1\mathbf{r} + m_1\mathbf{r}_2 + m_2\mathbf{r}_2 \\ (m_1 + m_2)\mathbf{R} &= m_1\mathbf{r} + \mathbf{r}_2(m_1 + m_2), \end{aligned} \quad (8.13)$$

despejando \mathbf{R}

$$\mathbf{R} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r} + \mathbf{r}_2, \quad (8.14)$$

obtenemos

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \quad (8.15)$$

y usando de nuevo (8.2)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r} + \mathbf{r}_2 \\
 &= \mathbf{r} + \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \\
 &= \mathbf{R} + \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) \mathbf{r} \\
 &= \mathbf{R} + \frac{m_1 + m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \\
 \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}.
 \end{aligned} \tag{8.16}$$

8.2. Propiedades generales del movimiento bajo fuerzas centrales

Antes de abordar soluciones específicas establezcamos las propiedades generales del movimiento bajo fuerzas centrales

$$F(r)\hat{\mathbf{r}} = \mu\ddot{\mathbf{r}}. \tag{8.17}$$

Aunque formalmente la ecuación (8.17) corresponde a un sistema de tres ecuaciones, con la ayuda de las leyes de conservación se puede reducir a una sola ecuación.

8.2.1. El movimiento está confinado a un plano

Lo cual reduce el problema a uno de dos ecuaciones. Para demostrar esta propiedad del movimiento bajo fuerzas centrales, partimos del hecho que la fuerza $F(r)\hat{\mathbf{r}}$, es a lo largo de $\hat{\mathbf{r}}$ y por consiguiente no puede ejercer torque sobre la masa reducida μ , es decir

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = F(r)\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{r}} = 0, \tag{8.18}$$

En ausencia de torques externos entonces el momento angular se debe conservar. Ya que

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mu\mathbf{v}, \tag{8.19}$$

donde $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$, entonces \mathbf{r} debe ser perpendicular a \mathbf{L} . Ya que \mathbf{L} está fijo en el espacio \mathbf{r} tiene que permanecer en el plano perpendicular a \mathbf{L} . De modo que el movimiento de la partícula de masa reducida μ queda confinado a un plano y tenemos una ecuación menos a considerar.

Podemos entonces escoger un sistema de coordenadas tal que el vector \mathbf{r} permanezca sobre el plano xy . Es conveniente usar coordenadas polares. Recapitulando la ecuaciones del movimiento curvilíneo (7.9)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
 &= v_r\hat{\mathbf{r}} + v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
 \mathbf{a}(t) &= [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2]\hat{\mathbf{r}} + [r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}]\hat{\boldsymbol{\theta}}.
 \end{aligned} \tag{8.20}$$

Sustituyendo en (8.17)

$$\begin{aligned} F(r) &= \mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ 0 &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Estas dos ecuaciones describen el movimiento de la partícula de masa reducida μ en el plano xy , pero en una forma en la cual es difícil de solucionar.

8.2.2. Cantidades conservadas

Moméntum angular

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times \mu \dot{\mathbf{r}} \\ &= \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Usando la ec.(8.20)

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mu \mathbf{r} \times (\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= \mu r \hat{\mathbf{r}} \times r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &= \mu r^2 \dot{\theta} \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}, \end{aligned} \quad (8.23)$$

de donde

$$L = \mu r^2 \dot{\theta} = \mu r v_{\theta}, \quad (8.24)$$

con

$$v_{\theta} = r\dot{\theta}. \quad (8.25)$$

Energía total

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \mu v^2 + U(r) \\ &= \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r), \end{aligned} \quad (8.26)$$

donde

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2} + U(r), \quad (8.27)$$

donde $U(r)$ es la energía potencial asociada a una fuerza $F(r)$ conservativa:

$$\mathbf{F} = -\nabla U(r). \quad (8.28)$$

En términos de las cantidades conservadas llegamos a dos ecuaciones diferenciales

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U_{\text{eff}}(r))}, \quad (8.29)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2(t)}, \quad (8.30)$$

que pueden combinarse en la ecuación de la trayectoria

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{1}{\sqrt{(2/\mu) (E - U_{\text{eff}}(r))}} \quad (8.31)$$

8.2.3. Encontrando el movimiento en problemas reales

Necesitamos relacionar la posición de m_1 y m_2 a \mathbf{r} y evaluar L y E . De los datos iniciales del problema: m_1 , m_2 , \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 , podemos calcular el momento angular y la Energía total en el sistema de centro de masa:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2 \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}'_1 - \dot{\mathbf{r}}'_2,\end{aligned}\tag{8.32}$$

e intentarlo relacionar con L y E en el sistema de masa reducida

De la ecs. (8.16) y (8.15) tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}.\end{aligned}\tag{8.33}$$

Las posiciones de los vectores de m_1 y m_2 relativas al centro de masa son

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'_1 &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \\ \mathbf{r}'_2 &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{R} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}.\end{aligned}\tag{8.34}$$

El momento angular alrededor del centro de masa es, usando ec.(8.32)

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_c &= m_1 \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{r}'_2 \times \mathbf{v}'_2 \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \times \mathbf{v}'_1 - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}'_2 \times \mathbf{v}'_2 \\ &= \mu \mathbf{r} \times (\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2) \\ &= \mu \mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}}'_1 - \dot{\mathbf{r}}'_2) \\ &= \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \\ &= \mathbf{L}.\end{aligned}\tag{8.35}$$

Similarmente

$$\begin{aligned}E_c &= \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + U(r) \\ &= \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_1 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}'_2 \cdot \mathbf{v}'_2 + U(r).\end{aligned}\tag{8.36}$$

De (8.34)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}'_1 &= \frac{\mu}{m_1} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{r}}'_2 &= -\frac{\mu}{m_2} \dot{\mathbf{r}}.\end{aligned}\tag{8.37}$$

tenemos

$$\begin{aligned}E_c &= \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2) + U(r) \\ &= \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2) + U(r) \\ &= \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + U(r) \\ &= \frac{1}{2} \mu v^2 + U(r) \\ &= E.\end{aligned}\tag{8.38}$$

Una vez calculada L_c y E_c podemos solucionar la ecuación de la trayectoria (8.31)

8.2.4. Ley de áreas iguales

Considerese el movimiento de la partícula de masa reducida μ en el plano perpendicular al momento angular conservado. En un tiempo t la partícula se encuentra en (r, θ) , mientras que en un tiempo $t + \Delta t$ la partícula se encuentra en $(r + \Delta r, \theta + \Delta \theta)$. Durante el intervalo de tiempo entre t y $t + \Delta t$ la partícula ha barrido un área $\Delta \mathcal{A}$. Para pequeños valores de $\Delta \theta$, el área $\Delta \mathcal{A}$ es aproximadamente igual al área de un triángulo con base $r + \Delta r$ y altura $r \Delta \theta$

$$\begin{aligned}\Delta \mathcal{A} &\approx \frac{1}{2}(r + \Delta r)(r \Delta \theta) \\ &= \frac{1}{2}r^2 \Delta \theta + \frac{1}{2}r \Delta r \Delta \theta\end{aligned}\quad (8.39)$$

La tasa a la cual el área es barrida es

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{A}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathcal{A}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}r^2 \frac{\Delta \theta}{\Delta t} + \frac{1}{2}r \frac{\Delta r \Delta \theta}{\Delta t} \right) \\ &= \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} \\ &= \frac{1}{2}r^2 \dot{\theta}.\end{aligned}\quad (8.40)$$

Usando la ec.(8.24) tenemos que

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{L}{2\mu}.\quad (8.41)$$

Ya que L es constante para una fuerza central, se sigue que $d\mathcal{A}/dt$ es también constante, de modo que podemos establecer la *Ley de áreas iguales* para el movimiento bajo una fuerza central de la siguiente manera: *El radio vector del origen de coordenadas al radio vector de la posición de la masa reducida en un determinado tiempo(ver Figura 8.2) barre áreas iguales en tiempos iguales*

8.2.5. Diagramas de energía

Muchas veces se pueden encontrar las características más interesantes de un movimiento en un sistema unidimensional usando *diagramas de energía*, en los cuales la energía total E y la energía potencial U se grafican como funciones de la posición. La energía cinética $K = E - U$ se encuentra rápidamente por inspección.

Los diagramas de energía permiten visualizar la estabilidad de un sistema. Un mínimo del potencial (en una dimensión) en el diagrama de energía corresponde a $dU/dx = 0$. Si la segunda derivada en el mínimo

$$\frac{d^2U}{dx^2} > 0,\quad (8.42)$$

el mínimo corresponde a un punto de equilibrio estable. Así mismo, sí

$$\frac{d^2U}{dx^2} < 0, \quad (8.43)$$

el mínimo corresponde a un punto de equilibrio inestable.

Para el oscilador armónico con $U = \frac{1}{2}kx^2$, el diagrama de Energía corresponde a una parábola con el mínimo en el origen. Ya que la energía total es constante para un sistema conservativo, E se representa con una línea horizontal. El movimiento está limitado a la región donde $E \geq U$. Los límites del movimiento, x_1 y x_2 son usualmente llamados puntos de retorno.

Lo que nos dice el diagrama es lo siguiente. La energía cinética $K = E - U$ es más grande en el origen, en el punto de equilibrio estable del sistema. A medida que la partícula pasa a través del origen en cualquier dirección, es frenada por el resorte y llega al reposo completo en los puntos x_1 y x_2 . La partícula se mueve entonces hacia el origen con una energía cinética en aumento y el ciclo se repite.

El oscilador armónico es un buen ejemplo de un sistema de movimiento confinado. A medida que E se incrementa, los puntos de retorno se alejan cada vez más, pero la partícula nunca se mueve libremente. Si E decrece, la amplitud del movimiento decrece, hasta que finalmente para $E = 0$ la partícula permanece en reposo en $x = 0$.

En el caso del movimiento bajo una fuerza central, la expresión para la energía total en términos de $U_{\text{eff}}(r)$ depende sólo de r y podemos visualizar el movimiento a través de los diagramas de energía. En el caso de una fuerza repulsiva de tipo $(C/r^2)\hat{\mathbf{r}}$, con $C = \text{constante}$, la energía potencial es $U(r) = C/r$, de modo que

$$U_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2} + \frac{C}{r} \quad (8.44)$$

que en total es una función decreciente de la distancia. Hay una distancia de máximo acercamiento, r_{min} , pero el movimiento no está confinado para r grande ya que U_{eff} decrece con la distancia. Si la partícula es disparada hacia el origen, esta gradualmente pierde energía cinética hasta que alcanza momentáneamente el reposo en r_{min} . El movimiento entonces se invierte y la partícula se mueve hacia el infinito. La rapidez inicial y final en un cualquier punto es idéntica; la colisión sólo invierte la velocidad.

Para el caso de una fuerza central atractiva del tipo $-(C/r^2)\hat{\mathbf{r}}$, con $C = \text{constante}$, la energía potencial es $U(r) = -C/r$, de modo que

$$\frac{1}{2} \frac{L^2}{\mu r^2} - \frac{C}{r}. \quad (8.45)$$

Ahora hay dos contribuciones compitiendo. La primera domina para $r \rightarrow 0$ y la segunda para $r \rightarrow \infty$. El resultado se ilustra en la figura y puede obtener con un código similar al siguiente

```
from pylab import *
r=linspace(0.01,1.2,1000)
plot(r,0.03/r**2,'g--',lw=2)
plot(r,-1/r,'b-.',lw=2)
plot(r,0.03/r**2-1/r,'r-')
hlines(0,0.,1.2,colors='k',linestyles='solid')
```

```
ylim(-10,10)
xlim(0,1.2)
ylabel(r'$U_{\text{eff}}(r)$',size=20)
xlabel(r'$r$',size=20)
savefig('diagener.pdf')
show()
```

Note que en el caso de otros potenciales de la forma $-1/r^n$ con $n > 1$, no es posible obtener el conjunto de trayectorias posible de hipérbolas y elipses que se obtiene para el caso de $n = 1$.

8.3. Ecuación de las trayectoria

8.3.1. $0 \leq \epsilon \leq 1$: Órbitas elípticas

Una elipse es una curva que es el locus de todos los puntos en el plano, cuya suma de las distancias r_1 y r_2 desde dos punto fijos F_1 y F_2 (los focos) separados por una distancia $2c$ es dado por una constante positiva $2a$, que resulta en la ecuación

$$r_1 + r_2 = 2a \quad (8.46)$$

donde a es el semieje mayor (asumiendo que $a > b$) y el origen de coordenadas está en uno de los focos. La distancia desde el origen de coordenadas al centro de la elipse está dada por (x_0, y_0) . El parámetro b se conoce como el semieje menor.

Los focos de la elipse satisfacen, haciendo $f = c$

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad (8.47)$$

Para demostrar esta última expresión, considere el hecho de que una elipse se puede construir desplazando un lápiz que estira una cuerda que esta fija en ambos extremos. Una posición del lápiz corresponde al locus de la parábola. Los extremos fijos de la cuerda definen los focos de la elipse. Si la longitud de la cuerda es $2h$ tenemos que cuando el locus esta a lo largo del semieje menor:

$$h^2 = c^2 + b^2, \quad (8.48)$$

mientras que cuando el punto fijo esta a lo largo de semieje mayor:

$$2h = (c + a) + (a - c) = 2a \quad (8.49)$$

de modo que $h = a$ y reemplazando en la ec. (8.48) obtenemos que

$$c^2 = a^2 - b^2. \quad (8.50)$$

Definimos la excentricidad como

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{c}{a} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \\ &= \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \end{aligned} \quad (8.51)$$

de modo que

$$b^2 = a^2(1 - \epsilon^2). \quad (8.52)$$

A partir de ésta expresión podemos expresar b , en términos de la energía y el moméntum angular

$$\begin{aligned} b &= a\sqrt{(1 - \epsilon^2)} \\ b &= \frac{-C}{2E} \sqrt{1 - 1 - \frac{2EL^2}{\mu C^2}} \\ b &= \frac{-C}{2E} \sqrt{-\frac{2EL^2}{\mu C^2}} \\ b &= \frac{L}{2E} \sqrt{-\frac{2E}{\mu}}, \end{aligned}$$

de modo que

$$b = \frac{L}{\sqrt{-2\mu E}}. \quad (8.53)$$

Note que como la energía gravitacional es negativa cuando la orbita es elíptica, la raíz cuadrada esta bien definida.

El valor de r_{\min} y r_{\max} se pueden obtener haciendo $y = 0$ en la ec. (??)

$$\begin{aligned} \frac{(x - \epsilon a)^2}{a^2} &= 1 \\ (x - \epsilon a)^2 &= a^2 \\ (x - \epsilon a) &= \pm a \\ x &= \epsilon a \pm a \\ x &= a(\pm 1 + \epsilon), \end{aligned} \quad (8.54)$$

de donde

$$\begin{aligned} x_{\max} &= a(1 + \epsilon) & x_{\min} &= -a(1 - \epsilon) \\ r_{\max} &= a(1 + \epsilon) & r_{\min} &= |x_{\min}| = a(1 - \epsilon), \end{aligned} \quad (8.55)$$

Como r se mide con respecto al origen de coordenadas, la distancia del centro de la elipse, el cual se encuentra sobre el eje x , al origen de coordenadas es

$$\begin{aligned} x_0 &= a - r_{\min} \\ &= a - a(1 - \epsilon) \\ &= a\epsilon \\ &= \frac{\epsilon r_0}{1 - \epsilon^2}. \end{aligned} \quad (8.56)$$

Además de la ec. (??), la condición $\epsilon \leq 1$ implica que

$$\begin{aligned}\epsilon^2 &= 1 + \frac{2EL^2}{\mu C^2} \leq 1 \\ \frac{2EL^2}{\mu C^2} &\leq 0,\end{aligned}\tag{8.57}$$

de donde resulta que $E < 0$ como se esperaba de la figura ?? ($E = 0$ corresponde a la ecuación de la parábola). La energía mínima se obtiene para la condición $\epsilon = 0$:

$$\begin{aligned}1 + \frac{2E_{\min}L^2}{\mu C^2} &= 0 \\ \frac{2E_{\min}L^2}{\mu C^2} &= -1 \\ E_{\min} &= -\frac{\mu C^2}{2L^2},\end{aligned}\tag{8.58}$$

Además, de la ec. (??), tenemos que para $\epsilon = 0$ $r_{\min} = r_{\max}$, que corresponde a una orbita circular.

$A = 2a$ se define como el eje mayor de la elipse.

Ejemplo Demuestre directamente de la ec. (??) que el centro de masa coincide con el foco de la elipse.

La ecuación se puede escribir en coordenadas cartesianas como

$$\begin{aligned}r &= \frac{rr_0}{r - \epsilon r \cos \theta} \\ r &= \frac{rr_0}{r - \epsilon x} \\ 1 &= \frac{r_0}{r - \epsilon x},\end{aligned}\tag{8.59}$$

y despejando r

$$\begin{aligned}r &= r_0 + \epsilon x \\ r^2 &= r_0^2 + \epsilon^2 x^2 + 2r_0 \epsilon x \\ x^2 + y^2 &= r_0^2 + \epsilon^2 x^2 + 2r_0 \epsilon x,\end{aligned}\tag{8.60}$$

de modo que

$$(1 - \epsilon^2)x^2 - 2r_0 \epsilon x + y^2 = r_0^2\tag{8.61}$$

Expresando la ec. (8.61) en la forma (??) podemos identificar

$$\frac{b^2}{a^2} = (1 - \epsilon^2),\tag{8.62}$$

de modo que

$$\begin{aligned}b &= a\sqrt{(1 - \epsilon^2)} \\ &= \frac{r_0}{(1 - \epsilon^2)}\sqrt{(1 - \epsilon^2)} \\ &= \frac{r_0}{\sqrt{(1 - \epsilon^2)}}\end{aligned}\tag{8.63}$$

De (??)

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 - a^2(1 - \epsilon^2) \\ &= a^2\epsilon^2, \end{aligned} \quad (8.64)$$

de modo que

$$c = a\epsilon = x_0. \quad (8.65)$$

Concluimos entonces que el centro de masa está en uno de los focos de la elipse.

Resumen

8.3.2. $\epsilon > 1$: Órbitas hiperbólicas

Comparando la ecs. (??) y (??) tenemos que

$$x_0 = \epsilon a = c, \quad (8.66)$$

De modo que el centro de masa, que coincide con el origen de coordenadas, está en el foco de la hipérbola correspondiente a la trayectoria física.

Además de la ec. (??)

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &= 1 + \frac{2EL^2}{\mu C^2} > 1 \\ \frac{2EL^2}{\mu C^2} &> 0, \end{aligned} \quad (8.67)$$

de donde resulta que $E > 0$ como se esperaba de la figura ???. En el límite de $\epsilon \rightarrow 1$ tendremos una parábola y $E = 0$.

Ejemplo 8.3.1. Solución: La ecuación de la órbita elíptica es

$$\frac{(x - a\epsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (8.68)$$

donde $b = a(1 - \epsilon^2)$. Despejando y^2

$$y^2 = b^2 \left[1 - \frac{(x - a\epsilon)^2}{a^2} \right]. \quad (8.69)$$

La condición de que las órbitas se crucen se obtiene igualando las coordenadas en y de cada órbita

$$\begin{aligned} b_T^2 \left[1 - \frac{(x - a_T\epsilon_T)^2}{a_T^2} \right] &= b_M^2 \left[1 - \frac{(x - a_M\epsilon_M)^2}{a_M^2} \right] \\ \frac{b_T^2}{a_T^2} [a_T^2 - (x - a_T\epsilon_T)^2] &= \frac{b_M^2}{a_M^2} [a_M^2 - (x - a_M\epsilon_M)^2] \\ (1 - \epsilon_T^2) [a_T^2 - x^2 - 2a_T\epsilon_T x + a_T^2\epsilon_T^2] &= (1 - \epsilon_M^2) [a_M^2 - x^2 - 2a_M\epsilon_M x + a_M^2\epsilon_M^2] \end{aligned}$$

Organizando el polinomio en x

$$\begin{aligned} &[-(1 - \epsilon_T^2) + (1 - \epsilon_M^2)]x^2 + 2[(1 - \epsilon_T^2)a_T\epsilon_T - (1 - \epsilon_M^2)a_M\epsilon_M]x + (1 - \epsilon_T^2)a_T^2(1 - \epsilon_T^2) \\ &\quad - (1 - \epsilon_M^2)a_M^2(1 - \epsilon_M^2) = 0 \\ &[\epsilon_T^2 - \epsilon_M^2]x^2 + 2[a_T\epsilon_T(1 - \epsilon_T^2) - a_M\epsilon_M(1 - \epsilon_M^2)]x + a_T^2(1 - \epsilon_T^2)^2 - a_M^2(1 - \epsilon_M^2)^2 = 0. \end{aligned}$$

Los coeficientes del polinomio en $Ax^2 + Bx + C$, corresponden a

$$\begin{aligned} A &= \epsilon_T^2 - \epsilon_M^2 \\ B &= 2[a_T\epsilon_T(1 - \epsilon_T^2) - a_M\epsilon_M(1 - \epsilon_M^2)] \\ C &= a_T^2(1 - \epsilon_T^2)^2 - a_M^2(1 - \epsilon_M^2)^2. \end{aligned}$$

El discriminante de la solución cuadrática es

$$\begin{aligned} B^2 - 4AC &= 4[a_T^2\epsilon_T^2(1 - \epsilon_T)^2 + a_M^2\epsilon_M^2(1 - \epsilon_M)^2 - 2\epsilon_T\epsilon_M a_T a_M(1 - \epsilon_T^2)(1 - \epsilon_M^2)] \\ &\quad - 4(\epsilon_T^2 - \epsilon_M^2)[a_T^2(1 - \epsilon_T^2)^2 - a_M^2(1 - \epsilon_M^2)^2] \\ &= \cancel{4a_T^2\epsilon_T^2(1 - \epsilon_T)^2} + \cancel{4a_M^2\epsilon_M^2(1 - \epsilon_M)^2} - 8\epsilon_T\epsilon_M a_T a_M(1 - \epsilon_T^2)(1 - \epsilon_M^2) \\ &\quad - \cancel{4a_T^2\epsilon_T^2(1 - \epsilon_T^2)^2} - \cancel{4\epsilon_M^2 a_M^2(1 - \epsilon_M^2)^2} + 4a_T^2\epsilon_T^2(1 - \epsilon_M^2)^2 + 4\epsilon_M^2 a_M^2(1 - \epsilon_T^2)^2 \\ &= -8\epsilon_T\epsilon_M a_T a_M(1 - \epsilon_T^2)(1 - \epsilon_M^2) + 4a_M^2\epsilon_T^2(1 - \epsilon_M^2)^2 + 4\epsilon_M^2 a_T^2(1 - \epsilon_T^2)^2 \\ &= 4[a_T\epsilon_M(1 - \epsilon_T^2) - a_M\epsilon_T(1 - \epsilon_M^2)]^2 \end{aligned}$$

Las soluciones son

$$\begin{aligned} x &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \\ &= \frac{2[a_T\epsilon_T(1 - \epsilon_T^2) - a_M\epsilon_M(1 - \epsilon_M^2)] \pm 2[a_T\epsilon_M(1 - \epsilon_T^2) - a_M\epsilon_T(1 - \epsilon_M^2)]^2}{2(\epsilon_T^2 - \epsilon_M^2)} \\ &= \frac{2(a_T\epsilon_T \pm a_T\epsilon_M)(1 - \epsilon_T^2) - (a_M\epsilon_M \pm a_M\epsilon_T)(1 - \epsilon_M^2)}{2(\epsilon_T^2 - \epsilon_M^2)} \\ &= \frac{2a_T(\epsilon_T \pm \epsilon_M)(1 - \epsilon_T^2) - a_M(\epsilon_M \pm \epsilon_T)(1 - \epsilon_M^2)}{2(\epsilon_T + \epsilon_M)(\epsilon_T - \epsilon_M)} \end{aligned}$$

dando lugar a

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{a_M(1 - \epsilon_M^2) - a_T(1 - \epsilon_T^2)}{\epsilon_M - \epsilon_T} \\ x_2 &= -\frac{a_M(1 - \epsilon_M^2) + a_T(1 - \epsilon_T^2)}{\epsilon_M + \epsilon_T} \end{aligned} \quad (8.70)$$

Para los parámetros de la tierra $a_T = 149.6 \times 10^6$ km, $\epsilon_T = 0.0167$ y un meteoro con $a_M = 394.4 \times 10^6$ km y $\epsilon_M = 0.71$ obtenemos como solución física el valor para x_1 :

$$\begin{aligned} x_1 &= -66.7712 \times 10^6 \text{ km} \\ y_1 &= 132.578 \times 10^6 \text{ km} \end{aligned} \quad (8.71)$$

con el otro punto de intersección en $(x_1, -y_1)$ como se muestra en la figura ??.

Ejemplo 8.3.2. 8.3.3. Potencial gravitacional

De hecho

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}(\mathbf{r}) &= -\nabla U(r) = C \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \\
 &= C \nabla \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\
 &= C \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\
 &= C \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\
 &= C \left(\frac{-1}{2} \frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-1}{2} \frac{2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{-1}{2} \frac{2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \\
 &= -\frac{C}{r^2} \frac{(x, y, z)}{r} \\
 &= -\frac{C}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \\
 &= -\frac{C}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.
 \end{aligned}$$

La fuerza gravitacional debe ser proporcional al peso del cuerpo sobre el cual actúa. Por la tercera ley de Newton debe ser proporcional al producto de las masas, de modo que

$$C \propto m_1 m_2. \quad (8.72)$$

8.4. Gravitación

La determinación de G permite determinar la masa de la tierra. La fuerza gravitacional de la tierra con masa M sobre un cuerpo de masa m sobre la superficie es igual al peso del cuerpo. Es decir

$$\begin{aligned}
 \frac{GMm}{R^2} &= mg \\
 \frac{GM}{R^2} &= g \\
 M &= \frac{gR^2}{G} \\
 M &= 5.9723(9) \times 10^{24} \text{ Kg}
 \end{aligned}$$

donde hemos usado los valores para el radio de la tierra, R y la aceleración gravitacional estándar g dados por

$$R = 6.378140 \times 10^6 \text{ m} \quad g = 9.80665 \text{ m s}^{-2}. \quad (8.73)$$

8.5. Leyes de Kepler

Como ya hemos demostrado que el centro de masa está en uno de los focos para un sistema de fuerzas centrales gravitacional, debemos considerar en este caso el sistema compuesto por el sol y alguno de sus planetas. En tal caso el centro de masa coincide con el sol, y la ley ?? resulta ser valida con buena aproximación.

Queda entonces por demostrar ?. Para la ley de gravitación tenemos

$$C = GmM = G\mu(M + m). \quad (8.74)$$

Partiendo de la definición del momento angular con respecto al centro del sistema reducido, tenemos también:

$$L = \mu r v = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt}. \quad (8.75)$$

$$\begin{aligned} \frac{L}{2\mu} dt &= \frac{1}{2} r (r d\theta) \\ &= d\mathcal{A}, \end{aligned} \quad (8.76)$$

donde $d\mathcal{A}$ es el area diferencial barrida durante el diferencial de tiempo dt . Integrando durante un período de la orbita

$$\frac{L}{2\mu} T = \mathcal{A} = \pi ab, \quad (8.77)$$

el área de la elipse. Entonces

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{4\mu^2}{L^2} \mathcal{A}^2 \\ &= \frac{4\mu^2}{L^2} \pi^2 a^2 b^2 \\ &= \frac{4\mu^2}{L^2} \pi^2 a^2 a^2 (1 - \epsilon^2), \end{aligned}$$

usando la ec. (??) y (8.74)

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{4\mu^2}{L^2} \pi^2 a^3 \frac{L^2}{\mu C} \\ &= \frac{\mu}{2C} \pi^2 8a^3 \\ &= \frac{\mu}{2G\mu(M_{\oplus} + m)} \pi^2 8a^3 \\ &= \frac{\pi^2}{2G(M_{\oplus} + m)} (2a)^3, \end{aligned} \quad (8.78)$$

donde M_{\oplus} es la masa sola. El resultado puede escribirse finalmente como:

$$T^2 = \frac{\pi^2}{2G(m + M_{\oplus})} A^3. \quad (8.79)$$

Ya que para todos los planetas $M_{\oplus} \gg m$, la constante aproximada de Kepler puede definirse como

$$k = \frac{\pi^2}{2GM_{\oplus}} \quad (8.80)$$

y la tercera ley queda establecida aclarando que es válida sólo de forma aproximada. Como la constante de Kepler se puede obtener a partir de medidas observacionales del sistema solar, la masa del sol se puede calcular. El valor actualizado es

$$M_{\oplus} = 1.988\,44(30) \times 10^{30} \text{ kg}. \quad (8.81)$$

Ejemplo 8.5.1. (Ejercicio 9.8 Klepner). Un proyectil de masa m es disparado desde la superficie de la tierra formando un ángulo α con la vertical. La velocidad inicial es igual a $\sqrt{GM/R}$. ¿cuanto se eleva el proyectil si $\alpha = 60^\circ$?. Desprecie la resistencia del aire y la rotación de la tierra.

Solucionaremos primero el problemas usando las leyes de conservación de la energía y del momento angular en el momento del lanzamiento y en la altura máxima. Luego solucionaremos el problemas usando la la ecuación de la orbita. Finalmente escribiremos y graficaremos la ecuación de la trayectoria.

Solución

Resolveremos el problema utilizando la ecuación de la orbita debemos conocer la energía en al menos un punto

$$\begin{aligned} E = E_0 &= \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} \\ L = L_0 &= \mu Rv_0 \sin \alpha \end{aligned} \quad (8.82)$$

Para

$$v_0^2 = \frac{GM}{R}, \quad (8.83)$$

tenemos

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m \frac{GM}{R} - \frac{GMm}{R} \\ &= -\frac{GMm}{2R} \\ &= -\frac{C}{2R}, \end{aligned} \quad (8.84)$$

y

$$\begin{aligned} L &= \mu Rv_0 \sin \alpha \\ &= \mu R \sqrt{\frac{GM}{R}} \sin \alpha \\ &= \mu \sqrt{\frac{RC}{m}} \sin \alpha \end{aligned} \quad (8.85)$$

Entonces, usando las ecs. (??)

$$a = -\frac{C}{(-2C/2R)} = R. \quad (8.86)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &= 1 + \frac{2EL^2}{\mu C^2} \\ &= 1 - \frac{2}{\mu C^2} \frac{C}{2R} \mu^2 \frac{RC}{m} \sin^2 \alpha \\ &= 1 - \frac{2}{\mu C^2} \frac{C}{2R} \mu^2 \frac{RC}{m} \sin^2 \alpha \\ &= 1 - \frac{\mu}{m} \sin^2 \alpha \\ &\approx 1 - \sin^2 \alpha \\ &= \cos^2 \alpha \end{aligned} \quad (8.87)$$

Para $\alpha = \pi/3$:

$$\epsilon = \frac{1}{2}. \quad (8.88)$$

A partir de (8.86) y (8.88) podemos obtener el c y b

$$\begin{aligned} f = c = a\epsilon &= \frac{R}{2} \\ b &= R\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = R\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}R \end{aligned} \quad (8.89)$$

Podemos escribir ahora la ecuación de la trayectoria:

$$\begin{aligned} r &= \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 - \epsilon \cos \theta} \\ &= \frac{3R}{4 - 2 \cos \theta} \end{aligned} \quad (8.90)$$

y teniendo en cuenta que $x_0 = f = R/2$

$$\frac{x - R/2}{R^2} + \frac{y^2}{3R^2/4} = 1 \quad (8.91)$$

El problema se reduce a encontrar r_{\max} a partir de cualquiera de las dos ecuaciones de trayectoria anteriores, o usando directamente la ec. (??):

$$\begin{aligned} r_{\max} &= a(1 + \epsilon) \\ &= R(1 + 1/2) \\ &= \frac{3R}{2}. \end{aligned} \quad (8.92)$$

El gráfico correspondiente se muestra en la figura ??.

Solución alternativa

También podemos resolver el problema usando conservación de energía (asumiendo que la tierra permanece en reposo)

□

8.6. Campo gravitacional

Hay algo curioso sobre la Ley de Gravitación Universal (??). De acuerdo a ésta ley, la fuerza gravitacional entre dos cuerpos es proporcional a sus masas. Pero, ¿Por qué la inercia esta relacional con la fuerza gravitacional? Después de todo, la inercia mide la resistencia de un cuerpo dado a desviarse de su estado preferido de movimiento uniforme en línea recta, en respuesta a algún factor externo. ¿Qué tiene que ver esto con la atracción gravitacional? En este sentido es muy útil introducir el concepto de campo asociado a una fuerza, en este caso el *campo gravitacional*. Una de las masas inerciales en la Ley de Gravitación Universal, actúa como un tipo de carga que produce un campo gravitacional. La otra masa inercial siente ese campo gravitacional y entonces se acelera. Si definimos el campo gravitacional producido por un cuerpo de masa M (como el sol) por

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, \quad (8.93)$$

entonces $\mathcal{G}(\mathbf{r})$ lo podemos visualizar como un *campo vectorial* con un vector de cierta magnitud y dirección en cada punto del espacio a una distancia r de la “carga” que produce el campo, como se ilustra en la figura [?]. Note que realmente los vectores de campo gravitacional llenan es una esfera en el espacio alrededor del cuerpo que lo genera.

En esta interpretación, cuando otra partícula de masa m (como por ejemplo una sonda espacial) atraviesa ese campo gravitacional, siente un vector de campo gravitacional cuya magnitud corresponde a la aceleración que la fuerza gravitacional le produce en un punto en el espacio a una distancia r del origen del mismo. En general, si el campo gravitacional en un punto del espacio es \mathcal{G} , la fuerza gravitacional sobre una masa m es ese punto es

$$\mathbf{F} = m\mathcal{G}, \quad (8.94)$$

De la segunda Ley de Newton obtenemos que el campo gravitacional en un punto es numéricamente igual a la aceleración gravitacional experimentada por un cuerpo localizado allí. De acuerdo con el principio de equivalencia formulado por primera vez por Albert Einstein *es imposible distinguir la aceleración producida por un campo gravitacional de la aceleración aparente generada por observaciones desde un sistema de referencia no inercial*. La hipótesis de que estos dos tipos de aceleración son indistinguible da lugar a todas las extrañas predicciones de la relatividad general. Es decir, relojes en potenciales gravitacionales diferentes corren a diferentes tasas, las masas deforman el espacio, etc.

Si consideramos la otra partícula como una partícula de prueba se puede hacer un mapa del campo gravitacional donde en cada punto la magnitud del vector de campo va disminuyendo con la distancia al cuadrado, como se muestra en la figura [?]. En esta interpretación, cuando otra partícula de masa m (como por ejemplo una sonda espacial) atraviesa ese campo gravitacional, siente un vector de campo gravitacional cuya magnitud corresponde a la aceleración que la fuerza gravitacional le produce en un punto en el espacio a una distancia r del origen del mismo. De este modo, a partir

del campo podemos calcular la fuerza reescribiendo la Ley de Gravitación Universal en términos de la segunda ley de Newton

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = m\left(-\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}\right) = m\mathcal{G} \quad (8.95)$$

De la segunda Ley de Newton obtenemos que el campo gravitacional en un punto es numéricamente igual a la aceleración gravitacional experimentada por un cuerpo localizado allí. De acuerdo con el principio de equivalencia formulado por primera vez por Albert Einstein *es imposible distinguir la aceleración producida por un campo gravitacional de la aceleración aparente generada por observaciones desde un sistema de referencia no inercial*. La hipótesis de que estos dos tipos de aceleración son indistinguible da lugar a todas las extrañas predicciones de la relatividad general. Es decir, relojes en potenciales gravitacionales diferentes corren a diferentes tasas, las masas deforman el espacio, etc

De esta manera, podemos trabajar en términos del campo sin hacer referencia a fuerzas. Como los vectores de fuerza y campo son proporcionales con la masa como factor de proporcionalidad, entonces el campo gravitacional también se puede obtener de la energía potencial

El campo es algo físico, es decir que puede transportar energía y momento y ocupa un lugar en el espacio. Aunque el campo gravitacional es difícil de visualizar, otros campos como el magnético sufren efectos en los que se nota más el efecto del campo. Por ejemplo en el efecto Meissner de superconductividad, la imposibilidad de las líneas de campo magnético de penetrar un superconductor, se refleja en el hecho de un imán levita sobre un material superconductor, como se muestra en la figura ?? Retomando la expresión para la energía potencial gravitacional

$$U(r) = -\frac{GmM}{r},$$

y usando la ec. (8.95), tenemos

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}) = \frac{1}{m}\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{m}\nabla U(r) = -\nabla\phi(r), \quad (8.96)$$

donde hemos definido la energía potencial por unidad de masa como

$$\phi(r) = \frac{1}{m}U(r), \quad (8.97)$$

$\phi(r)$ recibe el nombre del *potencial gravitacional*. Como

$$\begin{aligned} d\phi(x, y, z) &= \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz \\ &= \nabla\phi(r) \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

entonces el gradiente se puede interpretar como el cambio que sufre la función por el efecto de cambiar sus variables de x, y, z a dx, dy, dz . La ecuación

$$\phi(x, y, z) = \text{constante} = C,$$

define para cada valor de C define una superficie conocida como superficie de potencial gravitacional constante, que corresponden a esferas concéntricas a la partícula que genera el campo gravitacional.

Es más conveniente considerar la intersección de las superficie de potencial gravitacional constante con un plano. Es decir, los puntos sobre el campo gravitacional para los cuales

$$d\phi(x, y, z) = \nabla\phi(r) \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

que definen los que se denomina líneas equipotenciales, como se ilustran en la figura ??

En la práctica, un campo vectorial se suele visualizar en términos de las equipotenciales, como en el caso de *Bullet Cluster*, ilustrado en la figura ??. Esta imagen corresponde a una colisión de dos galaxias en la cual sólo se puede observar directamente la luz emitida la cual esta representada por las zonas rojas en la figura. Sin embargo, gracias a la distorsión observada en las imágenes de las otras galaxias que se interponen entra línea de visión y el Bullet Cluster, se puede inferir mediante el uso de una técnica llamada lentes gravitacionales, cual debe ser el campo gravitacional actuando entre las dos galaxias. Una vez obtenidas la correspondiente líneas equipotenciales se adiciona sobre la imagen, la parte azul, que aunque no visible, genera el campo gravitacional requerido.

Por ejemplo, el campo gravitacional cerca a la superficie de la tierra es

$$\begin{aligned} \mathbf{g} = \mathcal{G} &= -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \\ &\approx -\frac{GM}{R^2} \hat{\mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (8.98)$$

donde M es la masa de la Tierra y R es el radio de la Tierra. ya que $|\mathbf{f}| \approx 9.8$

Ejemplo Variación del campo gravitacional cerca a la superficie de la Tierra

8.7. Velocidad de escape

Si definimos el potencial gravitacional tal que sea cero en el infinito tenemos las diferentes posibilidades para el movimiento en términos de la velocidad de escape mostradas en la fig. ??

8.8. Fuerzas ficticias

Ejemplo: Un peso de masa m cuelga de una cuerda en un vagón con aceleración constante de magnitud A . ¿Cómo puede un observador dentro del vagón aislado que se encuentra en un sistema no inercial? ¿Cual es ángulo estático de la cuerda con la horizontal y cual es la tensión?

Solución: Al encontrarse la posición de equilibrio del péndulo fuera de la vertical se necesita incluir un fuerza ficticia que implica que el vagón está en un estado de aceleración uniforme.

Las ecuaciones de movimiento desde el sistema no inercial con aceleración constante son En y es la misma que antes

$$T \cos \theta - mg = 0,$$

pero en x

$$T \sin \theta + F_{\text{fict}} = 0,$$

Usando $F_{\text{fict}} = -mA$, obtenemos

$$T \sin \theta = mA,$$

entonces

$$\begin{aligned} T \cos \theta &= mg \\ T &= \frac{mg}{\cos \theta}, \end{aligned} \quad (8.99)$$

y

$$\begin{aligned} T \sin \theta &= mA \\ mg \frac{\sin \theta}{\cos \theta} &= mA, \end{aligned} \quad (8.100)$$

de donde

$$\tan \theta = \frac{A}{g}$$

De la ecs. (8.99) y (8.100)

$$T^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = m^2(A^2 + g^2),$$

y

$$T = m\sqrt{g^2 + A^2}$$

Las ecuaciones de movimiento en x y y desde un sistema inercial desde fuera del vagón:

$$\text{En } x: \quad T \sin \theta = mA$$

$$\text{En } y: \quad T \cos \theta - mg = 0,$$

que corresponde a la ec. (8.100)

8.8.1. Mareas

Las mareas son una evidencia de que la tierra se encuentra en un sistema noinercial. Sea $\mathcal{G}(\mathbf{r}_s)$ el campo gravitacional del sol (o la luna) sobre el centro de la tierra, con \mathbf{r}_s la distancia desde el centro del sol hasta el centro de la tierra. Un observador sobre la superficie de la tierra atribuye la marea a una fuerza ficticia \mathbf{F}_{fic} asociada a la aceleración que ocasiona el sol sobre el centro de la tierra:

$$\mathbf{A} = \mathcal{G}(\mathbf{r}_s). \quad (8.101)$$

De la ec. (??), tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{F}' &= \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{fict}} \\ &= m\mathcal{G}(\mathbf{r}) - mA \\ &= m\mathcal{G}(\mathbf{r}) - m\mathcal{G}(\mathbf{r}_s) \end{aligned} \quad (8.102)$$

donde $\mathcal{G}(\mathbf{r})$ es el campo gravitacional ejercido por el sol en un punto sobre la superficie de la tierra. En la figura ?? donde se exagera la diferencia entre el campo gravitacional en el centro de la tierra y la superficie, se muestra la fuerza aparente que causa la marea en la cara de la tierra que da al sol. La fuerza aparente en el punto A es

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}' &= m \left(-\frac{GM}{(r_s - R)^2} + \frac{GM}{r_s^2} \right) \hat{\mathbf{r}} \\
 &= -m \frac{GM}{r_s^2} \left(\frac{1}{(1 - R/r_s)^2} - 1 \right) \hat{\mathbf{r}} \\
 &= -m \mathcal{G}(\mathbf{r}_s) \left[\left(1 - \frac{R}{r_s} \right)^{-2} - 1 \right] \\
 &= -m \mathcal{G}(\mathbf{r}_s) \left[1 - 2\frac{R}{r_s} + \mathcal{O}\left(\frac{R^2}{r_s^2}\right) - 1 \right] \\
 &= -m \mathcal{G}(\mathbf{r}_s) \left[1 - 2\frac{R}{r_s} + \mathcal{O}\left(\frac{R^2}{r_s^2}\right) - 1 \right] \\
 &= -2m \mathcal{G}(\mathbf{r}_s) \frac{R}{r_s} + \mathcal{O}\left(\frac{R^2}{r_s^2}\right),
 \end{aligned}$$

y esta dirigida hacia el sol. La fuerza aparente en punto C que esta a una distancia del sol $r_s + R$, se obtiene de la expresión anterior reemplazando $R \rightarrow -R$, de modo que

$$\mathbf{F}' = +2m \mathcal{G}(\mathbf{r}_s) \frac{R}{r_s} + \mathcal{O}\left(\frac{R^2}{r_s^2}\right),$$

¡y esta dirigida en la dirección opuesta al sol!, como se muestra en figura ?. Es fácil mostrar que en los polos la fuerza aparente se dirige hacia el centro de la tierra por lo que el efecto total es la creación de las mareas. El efecto neto es crear una elevación máxima de 24 cm. Sin embargo la luna crea un efecto similar. Podemos estimar cual es más importante mirando la variación de cada uno de los campos

$$\frac{d\mathbf{F}'(\mathbf{r}_s)}{dr_s} = 2 \frac{GM_s m}{r_s^3} \qquad \frac{d\mathbf{F}'(\mathbf{r}_l)}{dr_l} = 2 \frac{GM_l m}{r_l^3},$$

cuyo cociente es

$$\frac{d\mathbf{F}'(\mathbf{r}_s)/dr_s}{d\mathbf{F}'(\mathbf{r}_l)/dr_l} = \frac{M_l r_s^3}{M_s r_l^3} \approx 2.1,$$

y la máxima elevación creada por la luna es de 53.5 cm.

8.8.2. Principio de equivalencia

A partir de estos resultado podemos establecer el *El principio de equivalencia*:

una fuerza ficticia $\mathbf{F}_{\text{fict}} = -m\mathbf{A}$ es indistinguible de la fuerza debido a un campo gravitacional uniforme (localmente)

$$\mathcal{G} = -\mathbf{A}.$$

En un campo gravitacional localmente constante \mathcal{G} una partícula de masa m experimenta una fuerza

$$\mathbf{F} = m\mathcal{G}.$$

La misma partícula en un sistema no inercial uniformemente acelerado con

$$\mathbf{A} = -\mathcal{G}$$

sin presencia de campo gravitacional ni ninguna otra interacción, tenemos

$$\mathbf{F}_{\text{fct}} = -m\mathbf{A} = m\mathcal{G},$$

de donde

$$\mathbf{A} = -\mathcal{G}.$$

No hay forma de distinguir localmente entre la aceleración gravitacional uniforme y un sistema de coordenadas con aceleración $\mathbf{A} = -\mathcal{G}$. Localmente quiere decir que \mathcal{G} es constante en magnitud y dirección y que el sistema está confinado. Un observador no confinado si podría distinguir las dos situaciones. El carácter local de \mathcal{G} tiene que ver con el hecho de un campo gravitacional uniforme no puede extenderse a través de todo el espacio.

Para ilustrar el principio de equivalencia considere un observador confinado dentro de un ascensor (sin ningún contacto con el exterior). En la primera situación el ascensor está cayendo libremente cerca de la superficie de la tierra. En la segunda situación el ascensor esta subiendo con una aceleración igual a la aceleración gravitacional. En ambos casos el observador se encuentra en un estado de ingravidez y ambos sistemas son indistinguible para el observador dentro del ascensor. Una situación similar ocurre en el interior de una nave espacial orbitando la tierra. A lo largo de la orbita el campo gravitacional es aproximadamente constante y la nave se encuentra en “caída libre” por lo que los astronautas están también en estado de ingravidez. En los entrenamientos de gravedad cero, se suele usar un avión el cual se deja caer desde una gran altura durante el tiempo que dura el estado de ingravidez.

8.9. Problemas resueltos

Ejemplo 8.9.1. Un satélite de masa $m = 2 \times 10^3$ kg está en órbita elíptica alrededor de la tierra. En el perigeo (punto p) (punto de mayor cercanía a la tierra) su altitud es $h_p = 1.1 \times 10^3$ Km y en el apogeo (punto a) (punto de más alejado de la tierra) su altitud es $h_a = 4.1 \times 10^3$ Km.

Solución

El semieje mayor de la órbita $A = 2a$ y la energía del sistema E se relacionan mediante la ecuación (??), que puede escribirse como

$$A = -\frac{C}{E} = -\frac{GMm}{E}.$$

Además el radio de la tierra es $R = 6.4 \times 10^3$ km.

??) Sea M la masa de la tierra y m la masa del satélite. Ya que $m \ll M$ podemos tomar $\mu \approx m$ y asumir que la tierra está fija. El eje mayor de la órbita elíptica

$$A = h_p + h_a + 2R,$$

además

$$E = -\frac{C}{A},$$

donde

$$\begin{aligned} C &= GMm = \frac{GM}{R^2} R^2 m \\ &= gmR^2, \end{aligned}$$

ya que

$$g = \frac{GM}{R^2}.$$

La energía inicial antes de lanzar el satélite fue

$$\begin{aligned} E_i &= -\frac{GmM}{R} \\ &= -\frac{C}{R}, \end{aligned}$$

La energía necesaria para poner el cuerpo en órbita es

$$\begin{aligned} \Delta E &= E - E_i = -\frac{C}{A} + \frac{C}{R} \\ &= C \left(-\frac{1}{A} + \frac{1}{R} \right) \\ &= C \left(\frac{A - R}{AR} \right) \\ &= gmR^2 \left(\frac{A - R}{AR} \right) \\ &= gmR \left(\frac{h_p + h_a + R}{h_p + h_a + 2R} \right) \\ &= gmR \left[\frac{1}{1 + R/(h_p + h_a + R)} \right] \\ &\approx 8.1 \times 10^{10} \text{ J}. \end{aligned}$$

??) De ec. (??)

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

??)

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{C}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{C}{h_p}$$

$$v_p = 7900\text{m s}^{-1}.$$

Capítulo 9

Oscilador harmónico

9.1. Oscilador armónico

Analizaremos en detalle la solución a la ecuación de movimiento del oscilador armónico simple que resulta de considerar la fuerza restauradora (en una dimensión)

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= -kx\hat{\mathbf{i}} \\ F_x &= -kx,\end{aligned}\tag{9.1}$$

en la segunda Ley de Newton (en una dimensión)

$$F_x = m\ddot{x}.$$

Usando la ec. (9.1) tenemos

$$\begin{aligned}m\ddot{x} + kx &= 0 \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x &= 0\end{aligned}\tag{9.2}$$

donde hemos definido la *frecuencia característica* del oscilador armónico como

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Note que la frecuencia característica de un oscilador armónico es por definición positiva y es *característica* de cada oscilador.

Se propone como solución general a la ecuación diferencial (9.2)

$$x = A \cos(\omega_0 t + \phi),\tag{9.3}$$

donde A es la amplitud del oscilador y ϕ su fase. O equivalentemente

$$x = B \sin(\omega_0 t) + C \cos(\omega_0 t)$$

donde

$$B = -A \sin \phi, \qquad C = A \cos \phi.\tag{9.4}$$

o en términos de B y C

$$\tan \phi = -\frac{B}{C} \qquad A = \sqrt{B^2 + C^2}. \qquad (9.5)$$

B y C ó la amplitud y la fase pueden obtenerse a partir de las condiciones

$$t=0 \qquad x_0 = x(0) \qquad v_0 = v(0),$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{v_0}{\omega_0} & C &= x_0 \\ A &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} & \tan \phi &= -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}. \end{aligned}$$

9.1.1. Energía del oscilador armónico

La fuerza restauradora es una fuerza conservativa que puede obtenerse a partir de la energía potencial

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2,$$

por lo tanto la energía mecánica del oscilador armónico se conserva. Para encontrar la energía conservada usaremos la solución (9.3) para obtener la energía potencial y cinética en cualquier punto de la oscilación

$$U(x) = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi), \qquad (9.6)$$

$$K(x) = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi). \qquad (9.7)$$

La energía mecánica es

$$\begin{aligned} E &= K(x) + U(x) \\ &= \frac{1}{2}kA^2, \end{aligned} \qquad (9.8)$$

que, en efecto, es constante.

La Energía mecánica puede relacionarse con cantidades globales asociadas a una oscilación completa. Para ello definimos el promedio de una función sobre un intervalo de tiempo t_1 a t_2 como

$$\langle f \rangle = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt.$$

Si $f(t) = \sin t$, para un período completo del seno entre 0 y 2π , dado por $T = 2\pi$, tenemos:

$$\langle f \rangle_T = 0$$

como puede esperarse de la resta de las dos áreas en el gráfico del seno.

Sin embargo, el promedio de $\sin^2 t$ es diferente de cero:

$$\langle f^2 \rangle_T = \frac{1}{2},$$

de modo que $1/2$ es el valor promedio de $\sin^2 t$.

Aplicando estos resultados a las funciones de energía potencial y cinética dadas por las ecuaciones (9.6) y (9.7)

$$\begin{aligned}\langle U \rangle &= \frac{1}{4}kA^2 \\ \langle K \rangle &= \frac{1}{4}kA^2,\end{aligned}$$

y

$$\langle E \rangle = E,$$

de modo que la energía mecánica del oscilador armónico coincide con su energía promedio.

El oscilador armónico es un sistema ideal. En la práctica ningún sistema oscila por siempre pues está sometido a fuerzas de amortiguamiento no conservativas debidas a la fricción con el medio que afectan la amplitud (pero no la frecuencia) del oscilador con el tiempo. Una vez el oscilador esta en reposo deber ser forzado, con una fuerza periódica, para regresarlo a su estado de oscilación. Desde el punto de vista práctico es conveniente estudiar las características que debe tener la fuerza periódica para maximizar la amplitud inicial de oscilación y así aumentar el tiempo que dura el sistema oscilando antes de amortiguarse completamente.

En adelante asumiremos que el oscilador se encuentra inicialmente en reposo en un sistema viscoso y veremos el efecto que tiene una fuerza periódica sobre su movimiento.

9.2. Oscilador forzado y amortiguado

Un oscilador forzado y amortiguado de masa m sufre el efecto combinado de la fuerza restauradora F_x (que depende de la elongación), la fuerza de fricción f (que depende de la rapidez a la que se mueve el oscilador) y una fuerza periódica \mathcal{F} (que depende del tiempo), de modo que está sometido a la fuerza total

$$F_{\text{total}} = F_x(x) + \mathcal{F}(t) + f(v).$$

La fuerza de fricción sobre un objeto moviéndose a través de un fluido líquido o gaseoso (a bajas velocidades) es usualmente proporcional a la rapidez de su movimiento¹

$$f(v) = -bv,$$

la constante de proporcionalidad depende de la forma y la masa del cuerpo, además de las propiedades del medio a través del cual se mueve el cuerpo. El fluido también se denomina medio viscoso.

A modo de ilustración, si el cuerpo es una placa horizontal sobre la superficie de un líquido que se comporta como un *fluido newtoniano*, como por ejemplo el agua

$$b = \mu \frac{A}{h},$$

¹A velocidades altas la fuerza de fricción es proporcional al cuadrado de la rapidez

donde μ es el coeficiente de viscosidad, A el área de la placa, y h la altura del fluido.

Sin pérdida de generalidad se puede escribir la fuerza periódica aplicada sobre un cuerpo como

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0 \cos(\omega t),$$

donde ω es la frecuencia de la fuerza aplicada y en general es independiente de la frecuencia propia del oscilador ω_0 .

Con estas consideraciones la fuerza total queda

$$F_{\text{total}} = -kx - b\dot{x} + \mathcal{F}_0 \cos(\omega t)$$

que da lugar a la ecuación de movimiento

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\mathcal{F}_0}{m} \cos(\omega t), \quad (9.9)$$

donde

$$\gamma = \frac{b}{m} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m},$$

donde γ y ω^2 tienen unidades de 1/seg. En lugar de solucionar directamente esta ecuación diferencial inhomogénea, es decir, que depende explícitamente del tiempo, introducimos una ecuación similar en términos de una variable *imaginaria* y

$$\ddot{y} + \gamma\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{\mathcal{F}_0}{m} \sin(\omega t),$$

y construimos una ecuación diferencial inhomogénea en términos de la variable compleja z

$$\begin{aligned} \ddot{x} + i\ddot{y} + \gamma\dot{x} + i\gamma\dot{y} + \omega_0^2 x + i\omega_0^2 y &= \frac{\mathcal{F}_0}{m} [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] \\ \ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z &= \frac{\mathcal{F}_0}{m} e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Si logramos solucionar esta ecuación, la parte real de dicha solución corresponderá a la solución del oscilador armónico forzado amortiguado (9.9).

Proponemos como solución para (9.10)

$$z = z_0 e^{i\omega t} \quad (9.11)$$

de donde

$$\begin{aligned} (-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2)z_0 &= \frac{\mathcal{F}_0}{m} \\ (\omega_0^2 + i\omega\gamma - \omega^2)z_0 &= \frac{\mathcal{F}_0}{m}, \end{aligned} \quad (9.12)$$

De esta ecuación podemos despejar z_0 , para luego obtener su magnitud y fase

$$\begin{aligned}
 z_0 &= \frac{\mathcal{F}_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 + i\omega\gamma - \omega^2} \\
 &= \frac{\mathcal{F}_0}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega\gamma} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma} \\
 &= \frac{\mathcal{F}_0}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \\
 &= \frac{\mathcal{F}_0}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} - i \frac{\mathcal{F}_0}{m} \frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \\
 &= x_0 + iy_0,
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{\mathcal{F}_0}{m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \\
 y_0 &= - \frac{\mathcal{F}_0}{m} \frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}.
 \end{aligned}$$

Podemos escribir z_0 en coordenadas polares encontrando su magnitud y fase

$$\begin{aligned}
 \phi &= \tan^{-1} \left(\frac{\omega\gamma}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \\
 |z_0|^2 &= x_0^2 + y_0^2 \\
 &= \left(\frac{\mathcal{F}_0}{m} \right)^2 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2]^2} \\
 &= \left(\frac{\mathcal{F}_0}{m} \right)^2 \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}.
 \end{aligned} \tag{9.13}$$

Expandiendo la solución en (9.11)

$$\begin{aligned}
 z &= z_0 e^{i\omega t} \\
 &= |z_0| e^{i\phi} e^{i\omega t} \\
 &= |z_0| \exp[i(\omega t + \phi)] \\
 &= |z_0| \cos(\omega t + \phi) + i |z_0| \sin(\omega t + \phi) \\
 &= x(t) + iy(t),
 \end{aligned} \tag{9.14}$$

9.2.1. Oscilador forzado

En ausencia de fricción con el medio viscoso, $\gamma = 0$ y la ec. (??) se reduce a

$$\begin{aligned}
 A(\omega) &= \frac{\mathcal{F}_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \\
 \phi &= \tan^{-1} 0 = 0,
 \end{aligned}$$

de modo que la solución (??) queda

$$x(t) = \frac{\mathcal{F}_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$$

La amplitud de oscilación $A(\omega)$ es máxima, de hecho \pm infinita, cuando $\omega \rightarrow \omega_0$ a izquierda y derecha, como se ilustra en la figura ??

Cuando la frecuencia de forzado ω es igual a ω_0 , se dice que se está operando a la *frecuencia de resonancia*. Operar en resonancia permite obtener amplitudes grandes para fuerzas impulsoras pequeñas, como ocurre por ejemplo en los tubos de órganos, o en el sintonizador de una radio. Un caso extremo es la bahía de Fundy en Canada, donde el período del oleaje para ir de un lado al otro de la bahía y el tiempo entre dos mareas altas (12.4 horas) es similar, lo que produce olas de mas de 10 m. En otras aplicaciones es necesario reducir la respuesta a una resonancia, como en la suspensión de un automóvil donde una fuerza viscosa es utilizada para disipar energía.

Example 9.2.1.1

Explique para un punto $A(\omega) < 0$ como se interpreta la solución

$$\begin{aligned} x(t) &= -|A(\omega)| \cos(\omega t) \\ &= |A(\omega)| \cos(\omega t) \cos \pi \\ &= |A(\omega)| (\cos(\omega t) \cos \pi - \sin(\omega t) \sin \pi) \\ &= |A(\omega)| \cos(\omega t + \pi), \end{aligned} \tag{9.15}$$

de modo que entre las soluciones a derecha e izquierda de la frecuencias de resonancia ocurre un desfase de π .

Por consiguiente, la solución al oscilador forzado se puede escribir como

$$x(t) = \begin{cases} \frac{\mathcal{F}_0}{m} \frac{1}{|\omega_0^2 - \omega^2|} \cos(\omega t) & \omega < \omega_0 \\ \frac{\mathcal{F}_0}{m} \frac{1}{|\omega_0^2 - \omega^2|} \cos(\omega t + \pi) & \omega > \omega_0 \end{cases}$$

9.2.2. Oscilador forzado y amortiguado

Sí $\omega = \omega_0$, la parte

$$h(\omega) \equiv \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2},$$

define la *altura de la Lorentziana*, como se ilustra en la Figura ??

$$h_0 \equiv h(\omega_0) = \frac{1}{(\gamma/2)^2} = \frac{4}{\gamma^2}$$

Además

$$h(\omega)|_{(\omega - \omega_0)^2 = (\gamma/2)^2} = \frac{h_0}{2}$$

Definimos la *amplitud de resonancia*, como la amplitud de la curva $\Gamma(\omega)$ en función de ω a la mitad del valor máximo. Dicha amplitud es la distancia en el eje ω entre un ω_+ y ω_- que son solución a la ecuación

$$(\omega - \omega_0)^2 = (\gamma/2)^2,$$

es decir,

$$\omega_{\pm} = \omega_0 \pm \frac{\gamma}{2}.$$

La amplitud de la resonancia es entonces

$$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = \gamma$$

A medida que γ decrece, la curva se vuelve más alta y estrecha. De modo que el rango sobre el cual el sistema responde llega a ser más pequeño y el oscilador llega a ser cada vez más selectivo en frecuencia, de la ecuación para el factor de calidad (9.18), teníamos

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma} \quad \text{si } \frac{\gamma}{\omega} \ll 1$$

Como $\Delta\omega = \gamma$, entonces, el factor de calidad de un oscilador forzado y suavemente amortiguado es

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\text{frecuencia de resonancia}}{\text{amplitud de resonancia}}.$$

Q caracteriza la frecuencia de respuesta de un sistema, a medida que Q crece, el sistema se vuelve más selectivo en frecuencias. Por ejemplo, en sistemas atómicos $Q \sim 10^8$ lo que implica que el sistema no genera ninguna respuesta a menos que sea forzado muy cerca a su amplitud de resonancia. Como la frecuencia de oscilación de dichos sistemas atómicos es independiente de influencias externas, la característica de tener alto Q puede usarse en algunas aplicaciones como los relojes atómicos.

9.2.3. Oscilador amortiguado

La frecuencia característica depende ahora de las propiedades del fluido y es, a partir de la ec.(??)

$$\begin{aligned} \omega_0 \rightarrow \omega &= \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \\ &= \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{2\omega_0}\right)^2}. \end{aligned}$$

Definimos el caso de amortiguamiento suave, la situación en la cual

$$\frac{\gamma}{\omega} \ll 1, \tag{9.16}$$

tal que $\omega_0 \approx \omega$.

El sistema ya no es conservativo de manera que la energía mecánica debe ser dependiente del tiempo

$$\begin{aligned} E(t) &= K(t) + U(t) \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2. \end{aligned}$$

Necesitamos $v(t)$. De (??)

$$\begin{aligned} v = \dot{x} &= A_0 \left[-\frac{\gamma}{2}e^{-(\gamma/2)t} \cos(\omega t + \phi) + -\omega e^{-(\gamma/2)t} \sin(\omega t + \phi) \right] \\ &= -A_0\omega e^{-(\gamma/2)t} \left[\sin(\omega t + \phi) + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\omega} \cos(\omega t + \phi) \right]. \end{aligned}$$

Aplicando la condición de amortiguamiento suave (9.16)

$$v \approx -A_0\omega e^{-(\gamma/2)t} \sin(\omega t + \phi),$$

y reemplazando en la ecuación para la energía

$$E(t) \approx \frac{1}{2}A_0^2 e^{-\gamma t} [m\omega^2 \sin^2(\omega t + \phi) + k \cos^2(\omega t + \phi)]$$

como en el límite de amortiguamiento suave $\omega_0 \approx \omega$, $k = m\omega_0^2 \approx m\omega^2$, y

$$\begin{aligned} E(t) &\approx \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-\gamma t} [\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)] \\ &= \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-\gamma t}. \end{aligned}$$

En $t = 0$,

$$E_0 \equiv E(0) = \frac{1}{2}kA_0^2,$$

de modo que

$$E(t) \approx E_0 e^{-\gamma t}.$$

Resulta entonces que la energía mecánica decrece exponencialmente con el tiempo. El decaimiento puede ser caracterizado por el tiempo τ requerido para que la energía decaiga a $e^{-1} = 0.368$ de su valor inicial

$$E(\tau) = E_0 e^{-\gamma\tau} = E_0 e^{-1}.$$

La condición para τ es entonces que

$$\gamma\tau = 1,$$

y

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{m}{b}. \quad (9.17)$$

τ es el tiempo de amortiguamiento del sistema. Definimos el *grado de amortiguamiento* como

$$Q = \frac{\text{energía almacenada en el oscilador}}{\text{energía disipada por radian}}$$

Energía perdida durante el tiempo que le toma al sistema oscilar por un radian. En el tiempo T el sistema oscila 2π radianes:

$$T = \frac{2\pi \text{ rad}}{\omega}$$

El tiempo para oscilar por un radián es

$$\Delta t \approx \frac{T}{2\pi} = \frac{2\pi/\omega}{2\pi} = \frac{1}{\omega}.$$

Para el caso de amortiguamiento suave

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma E_0 e^{-\gamma t} = -\gamma E,$$

La energía disipada en un intervalo de tiempo corto Δt es la cantidad positiva

$$\Delta E \approx \left| \frac{dE}{dt} \right| \Delta t = \gamma E \Delta t$$

como un radian de oscilación toma un tiempo

$$\Delta t = \frac{1}{\omega},$$

entonces

$$Q = \frac{E}{\Delta E} = \frac{E}{\gamma E \Delta t} = \frac{E}{\gamma E / \omega} = \frac{\omega}{\gamma}. \quad (9.18)$$

Un oscilador suavemente amortiguado satisface que $\omega \approx \omega_0$ y tiene

$$Q \approx \frac{\omega_0}{\gamma} \gg 1.$$

Es decir, un oscilador suavemente amortiguado tiene $Q \gg 1$. Un oscilador altamente amortiguado tiene un Q bajo

Note que entre más pequeño sea el amortiguamiento, menos energía se disipa. El tiempo de disipación de amortiguamiento del sistema fue definido en la ec. (9.17). En el caso de un oscilador forzado y suavemente amortiguado, dicho tiempo satisface la condición

$$\tau \Delta \omega = 1,$$

que limita el diseño de osciladores. Si un elemento es muy selectivo en frecuencia entonces necesariamente oscila durante mucho tiempo. Además, un elemento de estas característica le tomará mucho tiempo regresar al reposo después de aplicar una fuerza impulsora adecuada.

Ejemplo: La partícula Z corresponde a una resonancia centrada en 91.1876 ± 0.0021 GeV y con una amplitud de 2.4952 ± 0.023 GeV (En unidades naturales). ¿Cual es el tiempo de amortiguamiento (en este caso de decaimiento) de la resonancia?, ¿Cual es el factor de Calidad?

Solución: El factor de conversión de GeV a segundos es

$$1 \text{ GeV}^{-1} = 6.582\,118\,99 \times 10^{-25} \text{ s},$$

Entonces

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = 2.637\,9 \times 10^{-25} \text{ s}.$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma} = 36.5$$

Ejemplo 9.2.1. Si el factor de calidad de dos espejos esféricos que forman una cavidad resonante es $Q = 4 \times 10^{10}$. Dentro de esta cavidad se logra mantener un rayo de luz durante un tiempo de vida media de 130 ms. Calcular el período de rebotes del rayo de luz dentro de la cavidad, y el tamaño de la misma.

Solución: Como el factor de calidad es muy grande, podemos usar la aproximación de amortiguamiento suave. Usando $\tau = 0.13 \text{ s}$,

$$\begin{aligned} \omega_0 &= Q\gamma = \frac{Q}{\tau} \\ &= \frac{4 \times 10^{10}}{0.13 \text{ s}} \\ &= 3.08 \times 10^{11} \end{aligned}$$

De aquí obtenemos el período

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2.04 \times 10^{-11} \text{ s}$$

y la distancia que recorre la luz en ese tiempo es

$$\begin{aligned} lcT &= 299\,792\,458 \text{ m/s} \times 2.04 \times 10^{-11} \text{ s} \\ &= 0.006 \text{ m} \\ &= 0.6 \text{ cm} \end{aligned}$$

□

Capítulo 10

Relatividad Especial

10.1. Principio de relatividad

10.2. Transformaciones de Lorentz

Procedemos a establecer a continuación las propiedades de Grupo

10.2.1. Propiedades de $F(v_{x'}, V)$

10.3. Soluciones

10.3.1. $\Gamma < 0$

Genera paradoja inmediatas, como por ejemplo, que la suma de dos velocidades positivas de lugar a una velocidad negativa

10.3.2. $\Gamma = 0$

Con esta condición,

$$v_x = v_{x'} + V, \quad (10.1)$$

que constituye la ley de adición de velocidades de las transformaciones de Galileo. Con la definición

$$\Gamma V^2 = \frac{V^2}{c^2},$$

el límite de Galileo se puede recuperar bien sea considerando el caso $V \ll c$, o asumiendo que la velocidad límite es infinita, $c \rightarrow \infty$.

Esta solución de lugar también a paradojas relacionada con la información viniendo de cualquier lugar remotamente alejado del universo sin limitaciones de velocidad.

Por consiguiente, la única solución matemáticamente consistente y que respeta los postulados de la relatividad especial y la homogeneidad e isotropía del *espaciotiempo* es la solución con c^2 positiva y finita.

10.3.3. Ley de adición de velocidades**10.3.4. Simultaneidad y orden de eventos****10.3.5. Contracción de Lorentz****10.3.6. Dilatación temporal****10.4. Notación relativista**

Las transformaciones de Lorentz se definen como las transformaciones que dejan invariante al producto escalar en el espacio de Minkowski definido como

$$a^2 = g_{\mu\nu}a^\mu a^\nu \equiv a_\nu a^\nu = a^{0^2} - a^i a^i = a^{0^2} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \quad (10.2)$$

donde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, $i = 1, 2, 3$ y se asume suma sobre índices repetidos. Además

$$a_\nu \equiv g_{\mu\nu}a^\mu \quad (10.3)$$

Finalmente la métrica usada se define como

$$\{g_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (10.4)$$

donde $\{g_{\mu\nu}\}$ denota la forma matricial del tensor $g_{\mu\nu}$.

El producto de dos cuadvectores se define en forma similar como

$$a_\nu b^\nu = g_{\mu\nu}a^\mu b^\nu = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (10.5)$$

El inverso de la métrica es

$$\{g^{\mu\nu}\} \equiv \{g_{\mu\nu}\}^{-1} = \{g_{\mu\nu}\} \quad (10.6)$$

tal que

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu \quad \text{and} \quad a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu \quad (10.7)$$

Bajo una transformación de Lorentz.

$$\begin{aligned} a^\mu &\rightarrow a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu \\ a_\mu &\rightarrow a'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu a_\nu \end{aligned} \quad (10.8)$$

La invarianza del producto escalar en ec. (10.5)

$$\begin{aligned} a'^\mu b'_\mu &= a^\mu b_\mu \\ g_{\alpha\beta} a'^\alpha b'^\beta &= g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu \\ g_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha{}_\mu a^\mu \Lambda^\beta{}_\nu b^\nu &= g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu \\ \Lambda^\alpha{}_\mu g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta{}_\nu a^\mu b^\nu &= g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu, \end{aligned} \quad (10.9)$$

da lugar a

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta{}_\nu \quad \text{or} \quad \{g_{\mu\nu}\} = \{\Lambda_\mu{}^\alpha\}^T \{g_{\alpha\beta}\} \{\Lambda^\beta{}_\nu\}. \quad (10.10)$$

En notación matricial

$$g = \Lambda^T g \Lambda. \quad (10.11)$$

From eq. (10.10) we also have

$$\begin{aligned} g^{\rho\mu} g_{\mu\nu} &= g^{\rho\mu} \Lambda^\alpha{}_\mu g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta{}_\nu \\ \delta_\nu^\rho &= \Lambda_\beta{}^\rho \Lambda^\beta{}_\nu, \end{aligned} \quad (10.12)$$

or

$$\Lambda_\alpha{}^\mu \Lambda^\alpha{}_\nu = \delta_\nu^\mu. \quad (10.13)$$

Since

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha \Lambda^\alpha{}_\nu = \delta_\nu^\mu \quad (10.14)$$

the inverse of Λ is

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha = \Lambda_\alpha{}^\mu, \quad (10.15)$$

or

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu, \quad (10.16)$$

■ **Example:** Lorentz invariance

$$\begin{aligned} a_\mu b^\mu &\rightarrow a'_\mu b'^\mu = \Lambda_\mu{}^\nu a_\nu \Lambda^\mu{}_\rho b^\rho \\ &= \Lambda_\mu{}^\nu a_\nu \Lambda^\mu{}_\rho b^\rho \\ &= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \Lambda^\mu{}_\rho a_\nu b^\rho \\ &= \delta_\rho^\nu a_\nu b^\rho \\ &= a_\nu b^\nu. \end{aligned}$$

Como un ejemplo de Transformación de Lorentz considere un desplazamiento a lo largo del eje x

$$\{x^\mu\} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t+vx}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{x+vt}{\sqrt{1-v^2}} \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \{\Lambda^\mu{}_\nu\} \{x^\nu\}, \quad (10.17)$$

donde

$$\cosh \xi = \gamma \quad \sinh \xi = v\gamma, \quad \text{and} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (10.18)$$

y, por ejemplo:

$$t \cosh \xi + x \sinh \xi = \gamma(t + vx) = \frac{t + vx}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (10.19)$$

El $\Lambda^\mu{}_\nu$ definido en la ec. (10.17) satisface la condición en ec. (??),

$$\begin{aligned} \Lambda^T g \Lambda &= \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \xi & -\sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & -\cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi & \cosh \xi \sinh \xi - \cosh \xi \sinh \xi & 0 & 0 \\ \cosh \xi \sinh \xi - \cosh \xi \sinh \xi & \sinh^2 \xi - \cosh^2 \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= g \end{aligned} \quad (10.20)$$

Denotaremos los cuadvectores con índices arriba como

$$a^\mu = (a^0, a^1, a^2, a^3) = (a^0, \mathbf{a}) \quad (10.21)$$

Entonces el correspondiente cuadvector con índices abajo, usando la ec. (10.3), es

$$a_\mu = (a_0, a_1, a_2, a_3) = (a^0, -a^1, -a^2, -a^3) = (a^0, -\mathbf{a}). \quad (10.22)$$

Con esta notación, el producto escalar de cuadvectores puede expresarse como el producto escalar de los dos vectores de cuatro componente a^μ y a_μ .

Bibliografía

- [1]
- [2] MIT OCW, Physics I, Classical Mechanics, <http://goo.gl/jJSb3>¹
- [3] D. Kleppner, R.J Kolenkow, An Introduction To Mechanics, McGrawHill
- [4] David Morin, Introduction to Classical Mechanics, Cambridge
- [5] Young, Hugh D., Roger A. Freedman, and A. Lewis Ford.
- [6] Sears and Zemansky's University Physics: with Modern Physics. 12th ed. San Francisco, CA: Addison-Wesley, 2007. ISBN: 9780805321876.
- [7] Ruth W. Chabay, Bruce A. Sherwood, Matter & Interactions, Volume I: Moder Mechanics, John Wiley & Sons, Inc, 3rd ed., 2011. ISBN: 9780470503478
- [8] Teoría y Problemas de Física I, Gabriel Jaime Pérez Lince, disponible en la fotocopiadora de Ingeniería (Con muchos problemas resueltos!)

¹These MIT OpenCourseWare course materials have been translated into Spanish by DR. The MIT faculty authors, MIT, or MIT OpenCourseWare have not reviewed or approved these translations, and MIT and MIT OpenCourseWare makes no representations or warranties of any kind concerning the translated materials, express or implied, including, without limitation, warranties of merchantability, fitness for a particular purpose, non-infringement, or the absence of errors, whether or not discoverable. MIT OpenCourseWare bears no responsibility for any inaccuracies in translation. Any inaccuracies or other defects contained in this material, due to inaccuracies in language translation, are the sole responsibility of DR and not MIT OpenCourseWare.