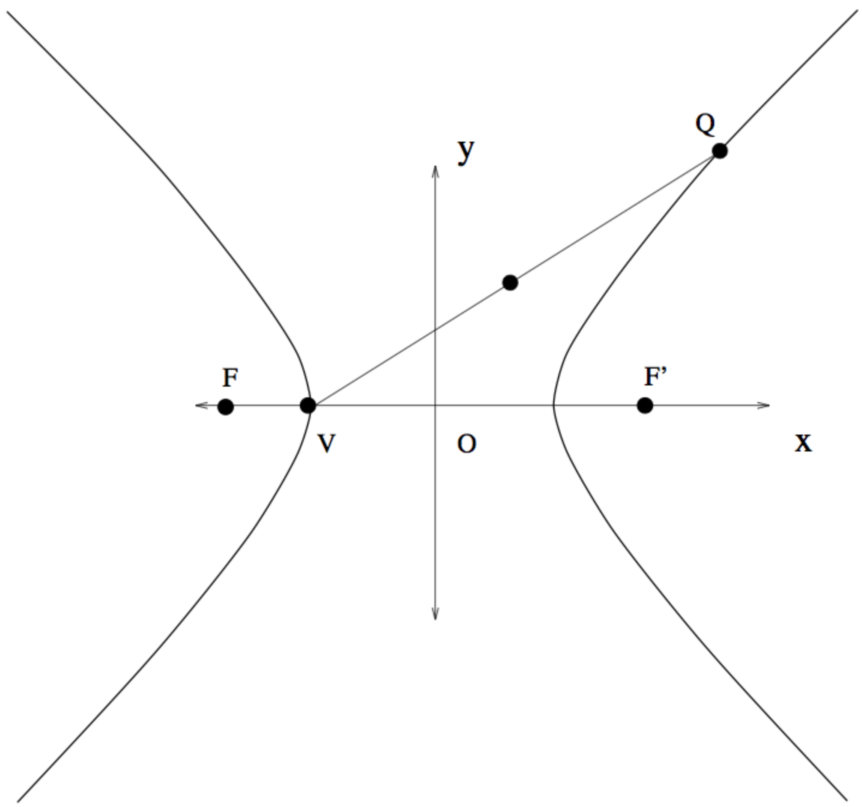
Herramientas Computacionales Laboratorio 2

Simon Cifuentes

April 2019

1 Problema 3.

Considere la hiperbola de la ecuacion $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Encuentre el lugar geometrico de los puntos medios a los trazos V Q, donde V es el vertice izquierdo de la hiperbola y Q un punto cualquiera de ella.



2 Solucion

Sea L la recta que pasa por V = (-a,0) y de pendiente m, L: y=m(x+a) Busquemos la interseccion de L con la hiperbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{y^2}{b^2} = \frac{m^2(x+a)^2}{b^2} \text{ } que\ equivale\ a\ (x^2 - a^2)b^2 = a^2m^2(x+a)^2$$

Esta ecuacion tiene dos soluciones: una es x = -a con y = 0, o sea el vertice izquierdo de la hiperbola, y la otra se despeja de la siguiente ecuacion

$$(x-a)b^2 = a^2m^2(x+a)^2 \Rightarrow x = \frac{a^3m^2 + ab^2}{b^2 - a^2m^2}(2.0pts.).$$

Observe que el punto medio entre V y V es V mismo, de modo V pertenece al lugar geometrico buscado. Asi, el lugar geometrco pedido son los puntos $(\alpha, \beta) \neq V$ que satisfacen las ecuaciones:

$$\alpha = \frac{x_0 - a}{2} = \frac{a^3m^2}{b^2 - a^2m^2} y\beta = m(\alpha + a)$$

Calculando el valor m de la ultima ecuacion y reemplazando en la primera se obtiene:

$$\alpha = \frac{a^2\beta^2}{b^2(\alpha + a^2) - a^2\beta^2} \text{ } o\ equivalente\ \alpha b^2(\alpha + a)^2 - \alpha\beta^2a^2 - a^3\beta^2 = 0$$

Como $(\alpha, \beta) \neq V$ las soluciones satisfacen la relacion
$b^2(\alpha^2 + \alpha a) - \beta^2\alpha^2 = 0\ que\ equivale\ a\ b^2((\alpha + \frac{a}{2})^2 - b^2a^2 = 0$
Esta ultima ecuacion puede reescribirse como :

$$\frac{(\alpha + \frac{a}{2})^2}{(\frac{a}{2})^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = 1(2.0pt.)$$

Luego el lugar geometrico es una hiperbola centrada en $(-\frac{a}{2}, 0)$ y con excentricidad $e' = \sqrt{1 + 4\frac{b^2}{a^2}}$. Las ecuaciones de sus directrices son
$D' : x = -\frac{a}{2e'} - \frac{\beta^2}{b^2}$ $D : x = \frac{a}{2e'}$
sus focos F y F' estn dados
$F = (-\frac{ae'}{2}, 0)$ $F' = (\frac{ae'}{2}, 0)$ y sus vertices son V y $(0,0)(2,0pts)$