

Geometria de superfícies isentrópicas

A. Vieira,* O. Carvalho,† M. Souza‡

13 de Julho de 2018

Resumo

A dinâmica topológica de inversões geométricas foi estudada em [6]. O espaço de parâmetros das medidas de Markov com suporte no atrator do sistema é um aberto de \mathbb{R}^3 folheado por superfícies de nível compactas definidas pela entropia métrica: *superfícies isentrópicas* [7]. Neste artigo abordaremos o aspecto geométrico dessas superfícies. Em particular, classificaremos suas geodésicas e pontos umbílicos.

Palavras chaves: geometria, superfícies isentrópicas, superfícies implícitas, geodésicas

Abstract

The topological dynamics of geometric inversions for studied in [6]. The control space of the supported Markov measurements is not available from \mathbb{R}^3 clad by settlement surfaces defined by metric entropy: *isentropic surfaces* [7]. In this paper we will cover the geometric aspect of surfaces. In particular, we will classify their geodesics and umbilical points.

Keywords: geometry, isentropic surfaces, implicitly given surface, geodesic

*Universidade Federal do Maranhão, E-mail: arlane@ufma.br

†Graduando em Ciência e Tecnologia, UFMA, E-mail: otaviof360@hotmail.com

‡Graduando em Ciência e Tecnologia, UFMA, E-mail: mauriciocardoso2@hotmail.com

1 Introdução

Em [7] são estudadas as superfícies de nível definidas pela entropia métrica, essas superfícies têm a forma:

$$\begin{aligned} -h_v(\sigma)g(x, y, z) &= (y - yz + z)[\phi(x) + \phi(1 - x)] \\ &+ (1 - z + xz)[\phi(y) - \phi(1 - y)] \\ &+ (1 - xy)[\phi(z) - \phi(1 - z)] \end{aligned} \tag{1}$$

Para $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$.

Note que $h_v(\sigma)$ indica a entropia métrica de σ . Em [7] é demonstrado que $0 \leq h_v(\sigma) \leq \log(2)$.

A função $g(x, y, z)$ é definida como segue:

$$g(x, y, z) = y(1 - x - z) + xz + 2 \tag{2}$$

A função $\phi(t)$ é definida da seguinte forma:

$$\phi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t = 0 \\ t \log t, & \text{se } t \neq 0 \end{cases} \tag{3}$$

Superfícies isentrópicas caracterizam a entropia métrica de um sistema dinâmico, por essa razão são importantes nesse campo de estudo e isso nos motivou a caracterizar alguns aspectos geométricos das mesmas, a título de informação esses aspectos foram as curvas geodésicas e os pontos umbílicos. Após uma revisão bibliográfica na área da geometria diferencial percebeu-se que, embora o estudo de superfícies parametrizadas já tenha bases fortes e consolidadas, o mesmo não é observado com respeito às superfícies dadas de forma

implícita, o fato dessas superfícies estarem em foco na pesquisa motivou uma investigação mais profunda em busca de trabalhos anteriores com foco nessa área, os resultados obtidos foram elencados em uma seção própria no presente artigo. Em virtude da pesquisa não ser de cunho apenas teórico e apresentar resultados obtidos de forma computacional, uma breve exposição acerca dos meios usados foi realizada visando dar condições para o leitor obter os mesmos resultados se dispuser de ferramentas adequadas. Com o avanço da pesquisa as curvas geodésicas da superfície isentrópica foram obtidas e, além disso verificamos a existência de pontos umbílicos na superfície estudada ao analisarmos que a mesma atendia aos requisitos de um teorema que assegura a existência de tais pontos.

2 Conceitos básicos

Seja f uma função real duas vezes diferenciável definida em um aberto de \mathbb{R}^3 . O gradiente ∇f , o Hessiano $H(f)$ e o adjunto do Hessiano $H^*(f)$ de f são definidos da seguinte forma:

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$$

$$H(f) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}$$

$$H^*(f) = \begin{bmatrix} f_{yy}f_{zz} - f_{yz}f_{zy} & f_{yz}f_{zx} - f_{yx}f_{zz} & f_{yx}f_{zy} - f_{yy}f_{zx} \\ f_{xz}f_{zy} - f_{xy}f_{zz} & f_{xx}f_{zz} - f_{xz}f_{zx} & f_{xy}f_{zx} - f_{xx}f_{zy} \\ f_{xy}f_{yz} - f_{xz}f_{yy} & f_{yx}f_{xz} - f_{xx}f_{yz} & f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx} \end{bmatrix}$$

2.1 Curvaturas média e gaussiana

Suponha que 0 é um valor regular de f e seja $S := f^{-1}(0)$. Assumiremos ainda, que S não possui pontos umbílicos.

A *curvatura média* de S é dada por [3, Theorem 4.3]:

$$K_M = \frac{\nabla f \cdot H(f) \cdot \nabla f^T - |\nabla f|^2 \cdot \text{tr}(H(f))}{2|\nabla f|^3}.$$

Além disso, a *curvatura gaussiana* pode ser avaliada da seguinte forma [3, Theorem 4.1]:

$$K_G = \frac{\nabla f \cdot H^*(f) \cdot \nabla f^T}{|\nabla f|^4}.$$

Em particular, as curvaturas principais são dadas por

$$k_1, k_2 = K_M \pm \sqrt{K_M^2 - K_G}.$$

2.2 Linhas de curvatura

Analogamente à sessão anterior, suponha que 0 é um valor regular de f e seja $S := f^{-1}(0)$. Assumiremos ainda, que S não possui pontos umbílicos. Para caracterizar as linhas de curvatura numa superfície nós usaremos o seguinte teorema apresentado em [1, Theorem 3.1]:

Teorema 2.1. *Uma condição necessária e suficiente para que uma curva em uma superfície seja uma linha de curvatura é que as normais à superfície ao longo da curva gerem uma superfície desenvolvível.*

Antes de fornecermos uma interpretação para o teorema anterior vamos introduzir a seguinte notação: $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

Então, seja $\alpha(s)$ uma curva parametrizada por comprimento de arco e que pertença à superfície, para que essa curva seja uma linha de curvatura, segundo o teorema 2.1, ela deve obedecer à seguinte expressão que caracteriza a superfície desenvolvível gerada pelos vetores normais ao longo da curva α :

$$(\alpha', \mathbf{n}, \mathbf{n}') = 0 \quad (4)$$

Onde \mathbf{n} denota o vetor normal à superfície dado por $\mathbf{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$, o sobrescrito $'$ significa a derivação com respeito ao parâmetro s . Usando a regra do quociente para derivação de funções, a expressão para a derivada do vetor \mathbf{n} fica:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= \frac{1}{|\nabla f|^2} \left(\frac{d(\nabla f)}{ds} |\nabla f| - \nabla f \frac{d(|\nabla f|)}{ds} \right) = \frac{1}{|\nabla f|} \left(\frac{d(\nabla f)}{ds} - \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \frac{d(|\nabla f|)}{ds} \right) \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= \frac{1}{|\nabla f|} \left(\frac{d(\nabla f)}{ds} - \frac{d(|\nabla f|)}{ds} \mathbf{n} \right) \Rightarrow \mathbf{n}' = \frac{1}{|\nabla f|} [(\nabla f)' - (|\nabla f|)' \mathbf{n}] \end{aligned}$$

Substituindo a expressão para \mathbf{n} na equação (4), obtemos:

$$\begin{aligned} (\alpha', \mathbf{n}, \mathbf{n}') &= \frac{1}{|\nabla f|} (\alpha', \mathbf{n}, (\nabla f)' - (|\nabla f|)' \mathbf{n}) = \frac{1}{|\nabla f|} (\alpha', \mathbf{n}, (\nabla f)') = \frac{1}{|\nabla f|^2} (\alpha', \nabla f, (\nabla f)') = 0 \\ (\alpha', \nabla f, (\nabla f)') &= 0 \end{aligned}$$

A partir do que foi desenvolvido anteriormente obtemos a equação diferencial das linhas de curvatura de uma superfície dada implicitamente, essa equação diferencial pode ser escrita como:

$$\Omega_1(x', y', z') = (\alpha', \nabla f, (\nabla f)') = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ f_x & f_y & f_z \\ f'_x & f'_y & f'_z \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

2.2.1 Direções principais

A fim de determinar as direções principais em cada ponto da superfície $f(x, y, z) = 0$ devemos primeiro notar que a equação (5) pode ser expandida em uma equação quadrática nas variáveis x' , y' , z' como segue:

$$\begin{aligned} \Omega_1(x', y', z') &= \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ &= A(x')^2 + 2Bx'y' + 2Cx'z' + D(y')^2 + 2Ey'z' + F(z')^2 \quad (6) \end{aligned}$$

Em que os coeficientes A, \dots, F são funções polinomiais resultantes de combinações das derivadas de $f(x, y, z)$ com relação às variáveis x, y e z , de forma que:

$$\begin{aligned} A &= f_y f_{zx} - f_z f_{yx} \\ B &= \frac{f_z f_{xx} - f_x f_{zx} + f_y f_{zy} - f_z f_{yy}}{2} \\ C &= \frac{f_y f_{zz} - f_z f_{yz} + f_x f_{yx} - f_y f_{xx}}{2} \\ D &= f_z f_{xy} - f_x f_{zy} \\ E &= \frac{f_x f_{yy} - f_y f_{xy} + f_z f_{xz} - f_x f_{zz}}{2} \\ F &= f_x f_{yz} - f_y f_{xz} \end{aligned}$$

Agora usaremos o fato de que o vetor tangente $\alpha' = (x', y', z')$ a cada ponto das linhas de curvatura é perpendicular ao vetor normal

desse ponto, isso se traduz por:

$$\Lambda_2(x', y', z') = \nabla f \cdot \alpha' = f_x x' + f_y y' + f_z z' = 0 \quad (7)$$

Portanto, $\alpha' = (x', y', z')$ satisfaz as equações:

$$\begin{cases} \Omega_1(\alpha') = 0 \\ \Omega_2(\alpha') = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Considerando que $f(x, y, z) = 0$ é uma superfície regular, ou seja, $\nabla f \neq 0$. Sem perder a generalidade podemos considerar que $f_z \neq 0$, isolando z' em $\Omega_1(\alpha') = 0$ e substituindo em $\Omega_2(\alpha') = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \Omega_3(x', y') = & (Af_z^2 - 2Cf_x f_z + Ff_x^2)(x')^2 + 2(Bf_z^2 - Cf_y f_z - Ef_x f_z + Ff_x f_y)x' y' \\ & + (Df_z^2 - 2Ef_y f_z + Ff_y^2)(y')^2 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Por comodidade podemos reescrever os coeficientes da equação (9) como U, V, W :

$$U = Af_z^2 - 2Cf_x f_z + Ff_x^2$$

$$V = 2(Bf_z^2 - Cf_y f_z - Ef_x f_z + Ff_x f_y)$$

$$W = Df_z^2 - 2Ef_y f_z + Ff_y^2$$

A equação (9) pode ser reescrita da forma:

$$\Omega_3(x', y') = U(x')^2 + Vx'y' + W(y')^2 = 0 \quad (10)$$

O discriminante da equação (10) é $\Delta = V^2 - 4UW$. O referido discriminante pode ser usado para avaliar os pontos umbílicos da

superfície, de acordo com [1, Theorem 3.3]:

Teorema 2.2. *Dado um ponto $p = (x, y, z) \in f(x, y, z) = 0$:*

(1) *p é um ponto não umbílico se, e somente se $\Delta > 0$.*

(2) *p é um ponto umbílico se, e somente se $\Delta = 0$.*

Em [1, Corollary 3.4] é demonstrado que para $\Delta \geq 0$ as direções principais têm a forma:

(1) Para $U \neq 0$ ou $W \neq 0$. Supondo $U \neq 0$. A equação (8) é resolvida para a variável x' , note que a escolha de resolver para x' foi arbitrária, pois, também poderíamos resolver para y' . Obtemos o seguinte resultado:

$$x'_i = \frac{-V \pm \sqrt{V^2 - 4UW}}{2U}, \text{ onde } i = 1, 2$$

Como consideramos anteriormente que $f_z \neq 0$ expressaremos as direções principais como função de f_z , note que as direções principais também têm de satisfazer a equação (5), dessa forma as direções principais ficam:

$$\mathbf{T}_i = (x'_i f_z, f_z, -x'_i f_x - f_y)$$

Perceba que os vetores \mathbf{T}_i descritos acima satisfazem as equações (4) e (5) e, portanto, são direções principais em um ponto (x, y, z) da superfície $f(x, y, z) = 0$.

Para $x'_1 = \frac{-V + \sqrt{V^2 - 4UW}}{2U}$, temos:

$$\mathbf{T}_1 = \left[(-V + \sqrt{V^2 - 4UW})f_z, 2Uf_z, (V - \sqrt{V^2 - 4UW})f_x - 2Uf_y \right]$$

Para $x'_2 = \frac{-V - \sqrt{V^2 - 4UW}}{2U}$, temos:

$$\mathbf{T}_2 = \left[(-V - \sqrt{V^2 - 4UW})f_z, 2Uf_z, (V + \sqrt{V^2 - 4UW})f_x - 2Uf_y \right]$$

(2) Para $U = 0$ e $W = 0$ devemos ter que $x' = 0$ ou $y' = 0$. Se $x' = 0$, teremos:

$$\mathbf{T}_1 = (0, f_z, -f_y)$$

$$\mathbf{T}_2 = (f_z, 0, -f_x)$$

Denotando as direções principais por $\mathbf{T}_i = (X, Y, Z)$, $i = 1, 2$. A equação diferencial das linhas de curvatura de superfície $f(x, y, z) = 0$ pode ser escrita como:

$$\frac{x'}{X} = \frac{y'}{Y} = \frac{z'}{Z}$$

2.2.2 Pontos umbílicos para uma superfície dada de maneira implícita

Nesta seção apresentamos um teorema mais viável na prática de determinação do pontos umbílicos de uma superfície dada implicitamente, segundo [1, Theorem 6.1].

Teorema 2.3. *Dado um ponto $p = (x, y, z) \in f(x, y, z) = 0$:*

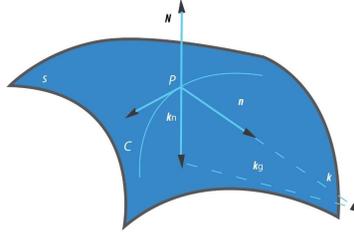
- (1) *p é um ponto umbílico se, e somente se $U = V = W = 0$.*
- (2) *p é um ponto não umbílico se, e somente se um dos coeficientes U, V, W for diferente de zero.*

2.3 Geodésica

A fim de determinar uma curva geodésica para uma superfície dada de forma implícita por $f(x, y, z) = 0$ partiremos do conceito de

curvatura geodésica. A figura a seguir ilustra os vetores curvatura em um superfície genérica.

Figure 1: Curvaturas



Fonte: Os autores

Na Figura 1, \mathbf{t} é o vetor tangente unitário à curva C no ponto P , \mathbf{n} é o vetor normal unitário à curva C no ponto P , \mathbf{N} é o vetor normal unitário à superfície S . O vetor curvatura \mathbf{k} pode ser expresso pela soma dos vetores \mathbf{k}_n e \mathbf{k}_g que são respectivamente, o vetor curvatura normal e o vetor curvatura geodésica, \mathbf{k}_n é a componente na direção normal à superfície e \mathbf{k}_g é a componente na direção perpendicular à \mathbf{t} . Definamos um vetor unitário \mathbf{u} perpendicular à \mathbf{t} e pertencente ao plano tangente à superfície, algebricamente temos $\mathbf{u} = \mathbf{N} \times \mathbf{t}$. Note que a componente do vetor curvatura na direção de \mathbf{u} é o vetor curvatura geodésica, logo,

$$\mathbf{k}_g = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}$$

A função escalar $\kappa_g = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}$ é chamada de curvatura geodésica da curva C no ponto P . Note que $\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{t}}{ds}$ e $\mathbf{u} = \mathbf{N} \times \mathbf{t}$, portanto, podemos expressar a curvatura geodésica como:

$$\kappa_g = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot (\mathbf{N} \times \mathbf{t}) \quad (11)$$

De posse do conceito de curvatura geodésica podemos determinar

as curvas geodésicas, tais objetos geométricos são caracterizados por serem curvas regulares cuja curvatura geodésica é nula. Consideremos uma curva parametrizada por comprimento de arco $r = r(s)$ ou $x = x(s), y = y(s), z = z(s)$ em uma superfície dada implicitamente $f(x, y, z) = 0$. Usando a equação (7) com $\mathbf{t} = (x', y', z')$, $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = (x'', y'', z'')$, $\mathbf{N} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$, obtemos a seguinte expressão para a curvatura geodésica de uma curva parametrizada por comprimento de arco na superfície dada implicitamente por $f(x, y, z) = 0$:

$$\kappa_g = \frac{(y'z'' - z'y'')f_x + (z'x'' - x'z'')f_y + (x'y'' - y'x'')f_z}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}$$

Fazendo $\kappa_g = 0$, obtemos:

$$(y'z'' - z'y'')f_x + (z'x'' - x'z'')f_y + (x'y'' - y'x'')f_z = 0 \quad (12)$$

O vetor tangente e o vetor curvatura são ortogonais, logo,

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0 \quad (13)$$

A terceira equação é obtida se atentarmos para o fato de que a geodésica é uma curva que deve ser percorrida com velocidade constante, ou seja, a aceleração é nula, no caso da superfície dada implicitamente isso se traduz por $\frac{d^2f}{ds^2} = 0$, conseqüentemente:

$$f_{xx}(x')^2 + f_{yy}(y')^2 + f_{zz}(z')^2 + 2(f_{xy}x'y' + f_{yz}y'z' + f_{xz}x'z') + f_x x'' + f_y y'' + f_z z'' = 0 \quad (14)$$

Resolvendo simultaneamente as equações (8) a (10) para as variáveis (x'', y'', z'') e supondo que a expressão $(z'f_y - y'f_z)^2 + (x'f_z - z'f_x)^2 + (y'f_x - x'f_y)^2$ não se anula, obtemos:

$$\begin{aligned}
x'' &= \frac{(x'f_z - z'f_x)z' + (x'f_y - y'f_x)y'}{(z'f_y - y'f_z)^2 + (x'f_z - z'f_x)^2 + (y'f_x - x'f_y)^2} \Lambda \\
y'' &= \frac{(y'f_z - z'f_y)z' + (y'f_x - x'f_y)x'}{(z'f_y - y'f_z)^2 + (x'f_z - z'f_x)^2 + (y'f_x - x'f_y)^2} \Lambda \\
z'' &= \frac{(z'f_y - y'f_z)y' + (z'f_x - x'f_z)x'}{(z'f_y - y'f_z)^2 + (x'f_z - z'f_x)^2 + (y'f_x - x'f_y)^2} \Lambda
\end{aligned} \tag{15}$$

Onde $\Lambda = f_{xx}(x')^2 + f_{yy}(y')^2 + f_{zz}(z')^2 + 2(f_{xy}x'y' + f_{yz}y'z' + f_{xz}x'z')$. Esse sistema de equações diferenciais de segunda ordem pode ser reescrito como um sistema de seis equações independentes de primeira ordem:

$$x' = p$$

$$y' = q$$

$$z' = r$$

$$p' = \frac{(pf_z - rf_x)r + (pf_y - qf_x)q}{(rf_y - qf_z)^2 + (pf_z - rf_x)^2 + (qf_x - pf_y)^2}$$

$$q' = \frac{(qf_z - rf_y)r + (qf_x - pf_y)p}{(rf_y - qf_z)^2 + (pf_z - rf_x)^2 + (qf_x - pf_y)^2}$$

$$r' = \frac{(rf_y - qf_z) + (rf_x - pf_z)p}{(rf_y - qf_z)^2 + (pf_z - rf_x)^2 + (qf_x - pf_y)^2}$$

2.4 Ferramentas computacionais utilizadas

Para a obtenção da curva geodésica pretendida fizemos uso do software Wolfram Mathematica, originalmente idealizado por Stephen Wolfram e desenvolvido constantemente pela empresa Wolfram Research. O software implementa um sistema de álgebra computacional. O software é pago mas fornece uma licença de avaliação

válida por 15 dias. Em certo momento também foi necessário o uso de um algoritmo na linguagem de programação Python, nessa etapa fizemos uso do IDLE que consiste em um ambiente de desenvolvimento integrado para Python.

3 Metodologia

Implementamos o sistema de equações diferenciais expresso em (11) no ambiente do Mathematica, no entanto ainda foi preciso determinar as condições iniciais para que o algoritmo tivesse êxito. As condições necessárias foram um ponto pertencente à superfície e um vetor tangente à superfície nesse mesmo ponto, essas condições se fizeram necessárias pois o sistema contém equações diferenciais ordinárias de segunda ordem que carecem de duas condições iniciais para serem resolvidas.

Para determinar um ponto pertencente à superfície atribuímos valores arbitrários para duas variáveis, dentro do domínio das mesmas obviamente, e obtivemos uma equação apenas em uma variável, as raízes dessa equação nos forneceram as coordenadas necessárias para determinar dois pontos pertencentes à superfície, escolhemos um deles ao acaso para solucionar o sistema de equações diferenciais. Para determinar um vetor tangente no referido ponto obtivemos, usando o Mathematica, a expressão para o gradiente da superfície analisada e substituímos as coordenadas do ponto determinado na etapa anterior, de posse desse vetor normal e de um ponto procedemos com a determinação da equação do plano tangente à superfície, a partir da equação do plano tangente atribuímos valores a duas variáveis e determinamos o vetor tangente pretendido. A título de

informação, as coordenadas do ponto, P , e do vetor tangente, u , são:

$$P = (0.5, 0.5, 0.07707507272443487)$$

$$u = (0.44116569384036164, 0.8823313876807233, -0.16390287639868117)$$

A Figura 2 mostra a interface do software Wolfram Mathematica 11.2 com a implementação do código para determinar a curva geodésica.

Figure 2: Implementação do código

```

WOLFRAM MATHEMATICA | PRODUCT TRIAL
Learning Center | Help | Contact Us | Buy Mathematica

ϕ[t_] := t x Log10[t];
logaritmo na base 10
ϕ[t_] := If[t ≠ 0, ϕ[t], 0];
h = (y[s] - y[s] x z[s] + z[s]) x (ϕ[x[s]] + ϕ[1 - x[s]]) + (1 - z[s] + x[s] x z[s]) x (ϕ[y[s]] + ϕ[1 - y[s]]) + (1 - x[s] x y[s]) x (ϕ[z[s]] + ϕ[1 - z[s]]);
y[s] x (1 - x[s] - z[s]) + x[s] x z[s] + 2
Δ = ∂x2 h (x'[s])2 + ∂y2 h (y'[s])2 + ∂z2 h (z'[s])2 + 2 ∂x2 h x'[s] y'[s] + ∂x2 h y'[s] z'[s] + ∂x2 h x'[s] z'[s];
Σ = (z'[s] ∂y2 h - y'[s] ∂z2 h)2 + (x'[s] ∂z2 h - z'[s] ∂x2 h)2 + (y'[s] ∂x2 h - x'[s] ∂y2 h)2;
s2 = NDSolve[{x''[s] == (x'[s] ∂x2 h - z'[s] ∂x2 h) z'[s] + (x'[s] ∂y2 h - y'[s] ∂x2 h) y'[s]} / Δ,
| resolve numericamente equação diferencial
y''[s] == (y'[s] ∂x2 h - z'[s] ∂y2 h) z'[s] + (y'[s] ∂z2 h - x'[s] ∂y2 h) x'[s]} / Δ,
z''[s] == (z'[s] ∂x2 h - y'[s] ∂z2 h) y'[s] + (z'[s] ∂y2 h - x'[s] ∂z2 h) x'[s]} / Δ, x[0] == y[0] == 0.5, z[0] == 0.07707507272443487, x'[0] == 0.44116569384036164,
y'[0] == 0.8823313876807233, z'[0] == -0.16390287639868117},
{x, y, z}, {s, 0, 10}];

```

Fonte: Interface do Wolfram Mathematica 11.2

Após obetermos a solução do sistema de equações diferenciais abordado usamos os comandos ContourPlot3D, ParametricPlot3D e Show para plotar a superfície e a curva geodésica. Na Figura 3 encontra-se o trecho de código usado.

Figure 3: Código de visualização

```

Show[ContourPlot3D[(y - y x z + z) x (ϕ[x] + ϕ[1 - x]) + (1 - z + x z) x (ϕ[y] + ϕ[1 - y]) + (1 - x x y) x (ϕ[z] + ϕ[1 - z]) == -0.24,
|mos... | gráfico 3D de contornos
y x (1 - x - z) + x x z + 2
{x, 0, 1}, {y, 0, 1}, {z, 0, 1}, Boxed -> False], ParametricPlot3D[{x[s], y[s], z[s]} /. s2, {s, 0, 10}, PlotStyle -> Black]
| rodead... | falso | gráfico paramétrico 3D | estilo do gráfico | preto

```

Fonte: Interface do Wolfram Mathematica 11.2

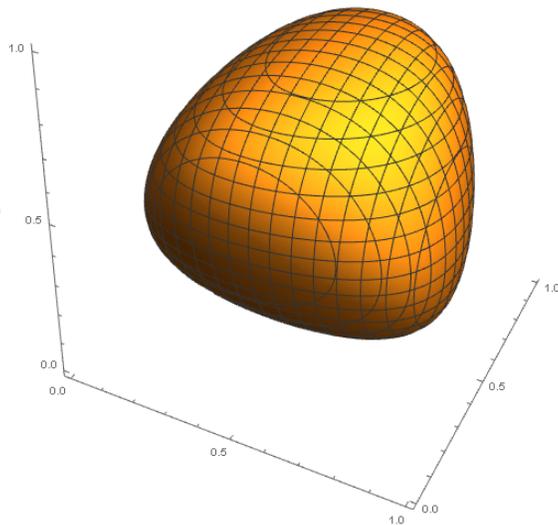
A linguagem de programação Python foi usada na etapa de determinação do ponto pertencente à superfície. Implementamos um

código simples do método da bissecção para determinar as raízes da equação obtida ao atribuímos valores a duas variáveis na equação (12) o que resultou em uma equação em uma só variável.

4 Resultados e discussões

A seguir encontram-se os resultados obtidos para as geodésicas da superfície em foco no presente estudo. O software usado para plotar o gráfico da superfície dada pela equação (12) foi o Mathematica 11.2 da companhia Wolfram Research, o gráfico em questão foi plotado com $h_v(\sigma) = 0.24$, na Figura 3 encontra-se o referido gráfico.

Figure 4: Superfície dada pela equação (12)



Fonte: Mathematica Wolfram 11.0

As curvas geodésicas obtidas encontram-se plotadas na Figura 5.

Fonte: Mathematica Wolfram 11.2

Na Figura 6 é possível observar a geodésica obtida de forma mais detalhada.

Figure 5: Geodésica da superfície dada pela equação (12)

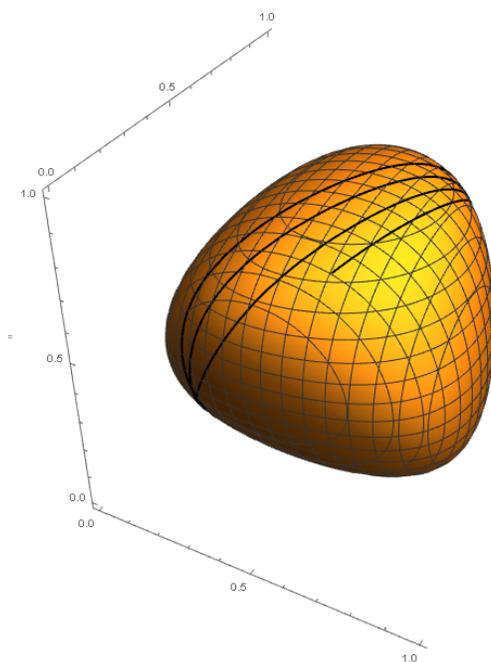
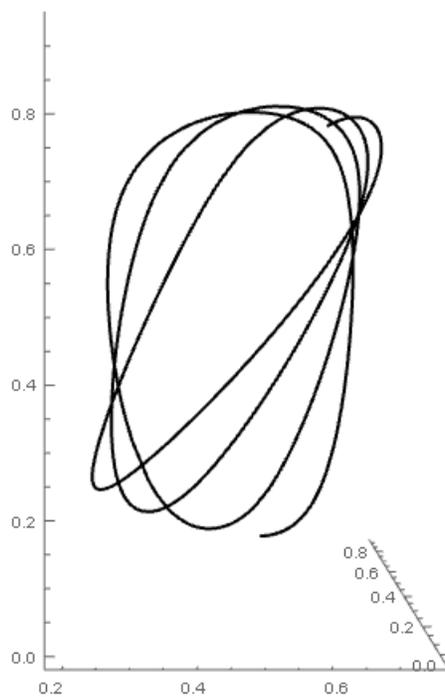


Figure 6: Detalhe da geodésica da superfície dada pela equação (12)



No decorrer da pesquisa avaliamos o discriminante da equação (6), a expressão para o discriminante em questão é bastante extensa e, portanto, optou-se pela omissão da mesma no presente trabalho, no entanto, ela é facilmente obtida usando-se algum software de álgebra computacional. Para analisar a continuidade desse discriminante, que trata-se de uma função de três variáveis, vamos analisá-lo da seguinte forma, usaremos o fato dele ser dado por produtos e quocientes de determinadas funções e analisaremos a continuidade dessas funções separadamente como segue abaixo:

(a) A função dada pela equação (2) aparece diversas vezes em denominadores da expressão analisada, trata-se de um polinômio e, portanto, é contínua, note também que essa função é estritamente positiva no domínio especificado o que implica que não há restrições sobre a mesma estar no denominador.

(b) Outras funções observadas são polinômios nas variáveis x , y e z e como já citado, são funções contínuas.

(c) As outras funções observadas na expressão são a ϕ , definida por (3), e suas derivadas, por definição a função ϕ é contínua e agora nos resta analisar a continuidade de sua derivada, é fácil ver que a derivada da função ϕ não existe no ponto 0, vale lembrar que no discriminante a derivada de ϕ é avaliada nas variáveis x , y e z e também nas expressões $1-x$, $1-y$ e $1-z$, logo, ela é descontínua nos extremos do intervalo que corresponde ao domínio dessas variáveis.

Note que, se $x \in (0, 1)$, $y \in (0, 1)$ e $z \in (0, 1)$ o discriminante é contínuo, além disso o valor mínimo assumido nesses intervalos de domínio é negativo e o valor máximo é positivo, logo, esse discriminante se anula em pelo menos um ponto da superfície, portanto, a

superfície possui pelo menos um ponto umbílico.

5 Considerações finais

Neste artigo obtemos as curvas geodésicas da superfície isentrópica dada pela equação (12), foi possível notar que a curva geodésica não se fecha sobre si mesma e continua envolvendo a superfície, também foi possível comprovar, por meio da análise do discriminante da equação (6), que a superfície objeto de estudo possui pontos umbílicos.

Deixamos como sugestão para futuras pesquisas a obtenção das linhas de curvatura e dos pontos umbílicos da superfície, sugerimos também que a tentativa de parametrizar localmente a superfície na vizinhança dos pontos umbílicos a fim de classificá-los.

Referências

- [1] CHE, Wujun; PAUL, J. C.; ZHANG, X. Lines of curvature and umbilical points for implicit surfaces. **Computer Aided Geometric Design**, v. 24, 2007, p. 395-409.
- [2] DO CARMO, M. P.; **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.
- [3] GOLDMAN, Ron; Curvature formulas for implicit curves and surfaces. **Computer Aided Geometric Design**, v. 22, 2005, p. 632-658.
- [4] FATELO, J. P.; MARTINS-FERREIRA N. Curvas Geodésicas em Superfícies. **Scripta-Ingenia**, Summer Solstice, 2014, p. 22-25.
- [5] MAEKAWA, Takashi; PATRIKALAKIS, N. M.; **Shape Interrogation for Computer Aided Design and Manufacturing**. Springer-Verlag, New York.
- [6] VIEIRA, A.; MANDELA, L.; FERNANDES, P.; MOURA, V. Geometria plana, cadeia de Markov e caos. CQD: **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 11, p. 34-47, dez. 2017.
- [7] VIEIRA, A.; MANDELA, L.; FERNANDES, P.; MOURA, V. Entropia máxima em inversões geométricas. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves - RS, 2018. No prelo.
- [8] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 11.2, Champaign, IL (2017).