Universidad Nacional Autónoma de Honduras
Carrera de Matemática
Lecturas de Elemento Finito

Jorge Destephen Ph.D.

Junio-Agosto, 2012

Contenido

1. Introducción a la teoría de distribuciones.
2. Aplicación de las distribuciones en la solución de ecuaciones diferenciales(ED).
3. Método de elementos fínitos(MEF) para problemas en una, dos y tres dimensiones.

Teoría de Distribuciones(TD)

Podría considerarse como la teoría de las fuerzas concentradas.

Motivación

Funciones clásicas $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
Funciones continuas en $D \subset \mathbb{R}^n \sim C^0(D)$
Funciones continuas por partes en $D \sim H^0(D)$
Para todas estas funciones existe $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$
Si $g(x) = 0\ \forall x \neq a$ en donde $a \in \mathbb{R} \Longrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$.
Consideremos la función donde $a \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$

$$h_\epsilon(x-a) = \begin{cases} 0 & x > a + \dfrac{\epsilon}{2} \\ \dfrac{1}{\epsilon} & a - \dfrac{\epsilon}{2} < x < a + \dfrac{\epsilon}{2} \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} h_\epsilon(x-a) &= \int_{a-\frac{\epsilon}{2}}^{a+\frac{\epsilon}{2}} \frac{1}{\epsilon} dx \\ &= \frac{1}{\epsilon}\left(a + \frac{\epsilon}{2} - a + \frac{\epsilon}{2}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Lo cual implica que $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} h_\epsilon(x-a)dx = 1$ donde $\lim_{\epsilon\to 0} h_\epsilon(x-a)$ es una función con las siguientes características, llamemosla $\delta(x-a)$.

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0 & x \neq a \\ +\infty & x = a \end{cases}$$

Tenemos una contradicción con la teoría clásica de funciones ya que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)dx = 1 \tag{2}$$

La conclusión es que una función con estas características (1) y (2) no es una función clásica. Así, entonces necesitamos un nuevo concepto o teoría para eliminar está contradicción.

Funciones de Prueba

Definición 1

Una función de prueba $\phi(x) = \phi(x_1, \ldots, x_n)$ es una función infinitamente derivable en $\mathbb{R}^n$, y que es cero fuera de una región acotada(la región puede variar de función de prueba a función de prueba). El espacio de las funciones de prueba en $\mathbb{R}^n$ se denota por $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Ejemplo 2

1. Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geqslant 1 \end{cases}$$
$$\phi'(x) = \begin{cases} -\frac{2x}{(x^2-1)^2} e^{\frac{1}{x^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

   Para probar que $\phi'(x)$ existe y es continua en todo $\mathbb{R}$ debemos probar que

$$\lim_{x\to 1^-} -\frac{2x}{(x^2-1)^2} e^{\frac{1}{x^2-1}} = 0$$

   por L'Hopital se puede probar que $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{e^{\frac{1}{x^2-1}}}{(x^2-1)^m} = 0$ con lo cual combinado con inducción se puede probar que $\phi^m(x)$ existe, para toda m con la propiedad de ser cero fuera de $|x| < 1$.

2. Sea $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}} & \|x\| < 1 \\ 0 & \|x\| \geqslant 1 \end{cases}$$

3. Sea $\phi_1, \phi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces $c_1\phi_1 + c_2\phi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

4. Sea $\phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces $\phi\left(\dfrac{x-x_0}{\epsilon}\right)$ es también función de prueba en $\mathbb{R}^n$ $\quad \dfrac{x-x_0}{\epsilon} \in \mathbb{R}^n$ con $\epsilon > 0$

$$\left\|\frac{x-x_0}{\epsilon}\right\| < a > 0$$
$$\|x-x_0\| < a\epsilon$$

   por lo tanto el nuevo radio es $a\epsilon$.

Funcional Lineal

Definición 3

Decimos que f es un funcional lineal en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ si existe una regla de correspondencia que asigna a cada $\phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ un número real $f(\phi) = \langle f, \phi \rangle$ donde para todo

$$\langle f, \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 \rangle = \alpha_1 \langle f_1, \phi_1 \rangle + \langle f_2, \phi_2 \rangle .$$

Sea

$$\begin{aligned} f : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ : \phi &\longmapsto f(\phi) = \langle f, \phi \rangle \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Sea

$$\begin{aligned} f : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ : \phi &\longmapsto T(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx \end{aligned}$$

Si f es diferenciable $0 \leqslant x \leqslant \pi$ entonces f esta bien caracterizada por sus coeficientes de *Fourier* de senos

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(x)dx \\ &= f(\sin\, nx) \\ &= \langle f, \sin\, nx \rangle . \end{aligned}$$

Es facil ver que (3) y (4) se prueban utilizando la linealidad

$$\langle f, 0 \rangle = 0 \tag{3}$$

$$\left\langle f, \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \phi_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \langle f, \phi_k \rangle \tag{4}$$

Convergencia en el Espacio C_0^∞

Notación 5

Sean n variables independientes: $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}_0^+$ en donde $\mathcal{K} = (k_1, \ldots, k_n)$ multiíndice de dimensión n.

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}| &= k_1, \ldots, k_n \\ D^{\mathcal{K}} &= \frac{\partial^{|\mathcal{K}|}}{\partial x^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \end{aligned}$$

Ejemplo 6

1. n=4 con $\mathcal{K} = (1, 2, 0, 3)$ $D^{1,2,0,3} = \dfrac{\partial^6}{\partial x_1 \partial x_2^2 \partial x_4^3}$

   El operador diferencial L de orden p en n-variables puede ser escrito así

   $$L = \sum_{|\mathcal{K}| \leqslant p} a_{\mathcal{K}}(x) D^{|\mathcal{K}|}$$

   $x = (x_1, \ldots, x_n) \qquad a_{\mathcal{K}}(x) = a_{k_1,\ldots,k_n}(x)$

2. n=1 p=2

   $$L = a_0(x) + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_2(x)\frac{d}{dx^2}$$

3. n=2 p=2 $a_{\mathcal{K}}(x) = a_{k_1,k_2}(x_1, x_2)$

$$\begin{aligned} L &= \sum_{|\mathcal{K}|\leqslant 2} a_{\mathcal{K}}(x_1,x_2)D^{\mathcal{K}} \\ &= a_{0,0}(x_1,x_2) + a_{1,0}(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + a_{0,1}\frac{\partial}{\partial x_2} + a_{1,1}(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_2} + a_{2,0}(x_1,x_2)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \\ &+ a_{0,2}(x_1,x_2)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{aligned}$$

Soporte

Definición 7

El soporte de $f(x)$ es la cerradura del conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n$ en los cuales $f(x) \neq 0$.

Ejemplo 8

Las funciones de prueba del primer ejemplo.
El soporte de $\phi(x)$ es la bola cerrada $|x| \leqslant 1$.

Sucesión Nula

Definición 9

Sea $\{\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x), \ldots\}$ una sucesión de funciones en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, la sucesión anterior es una sucesión nula en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ si y solo si cumplen las siguientes condiciones:

1. Existe una región acotada fuera de la cual todas las $\phi_m(x)$ se hacen cero. El soporte de todas las $\phi_m(x)$ están contenidas en una bola suficientemente grande.
2. Para cada multiíndice $\mathcal{K}$ de dimensión n tenemos que $\lim\limits_{m\to+\infty} \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \left|D^{\mathcal{K}}\phi_m(x)\right| = 0$

$\phi_m(x) \to 0$ uniformemente cuando $m \to +\infty$
$\dfrac{\partial \phi_m(x)}{\partial x_i} \to 0$ uniformemente cuando $m \to +\infty$

Ejemplo 10

1. Sea $\phi(x)$ una función de prueba, entonces $\left\{\dfrac{1}{m}\phi(x)\right\}$ es una sucesión nula en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$
   $\phi(x), \dfrac{1}{2}\phi(x), \dfrac{1}{3}\phi(x), \ldots, \dfrac{1}{m}\phi(x), \ldots$
   Si $\phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow c\phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$
   (a) El soporte de $\phi(x)$ es el soporte de $\dfrac{1}{m}\phi(x)$ (m=2,...) este es el soporte común.
   (b)
   $$\begin{aligned} \lim_{m\to+\infty} \max_{x\in\mathbb{R}^n} \left|D^{\mathcal{K}}\phi_m(x)\right| &= \lim_{m\to+\infty} \max \left|D^{\mathcal{K}}\frac{1}{m}\phi(x)\right| \\ &= \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{m} \max_{x\in\mathbb{R}^n} \left|D^{\mathcal{K}}\phi(x)\right| \end{aligned}$$

   El máximo existe ya que $\phi(x)$ es continuamente derivable con soporte compacto
   $\therefore \left\{\frac{1}{m}\phi(x)\right\}$ es una sucesión nula en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2. Si $\phi(x)$ es una función de prueba, entonces $\left\{\frac{1}{m}\phi(\frac{x}{m})\right\}$ no es una sucesión nula en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.
   Si $\phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \phi(\frac{x}{m}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$
   $\phi(x)$ tiene soporte compacto, donde $m = 1, 2, \ldots$

$$|x| < r \Longrightarrow \left|\frac{x}{m}\right| < r$$
$$|x| < rm$$

   No existe un soporte común, por lo tanto $\left\{\dfrac{1}{m}\phi(\dfrac{x}{m})\right\}$ no es una sucesión nula.

Distribución

Definición 11

Un funcional lineal en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es continuo siempre que $\{\phi_m(x)\}$ es una sucesión nula en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.
La sucesión numérica $\langle f, \phi_m \rangle$ tiende a cero cuando $m \to +\infty$.
Un funcional lineal continuo en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ se llama distribución o función generalizada

$$\langle f, \phi_m \rangle = F(\phi_m(x))$$
$$\mathrm{dom}(f) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Funciones Localmente Integrables(FLI)

Definición 12

Una función f en $\mathbb{R}^n$ es FLI si $\displaystyle\int_\Omega |f| dx$ existe para cualquier Ω acotado en $\mathbb{R}^n$

Ejemplo 13

1. Funciones continuas

2. Funciones continuas por partes

3. Sea $f(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$ con $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es FLI si $\alpha > n$
   caso $n = 1$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\Omega = [a, b]$ $x \geqslant 0$

$$\int_a^b \frac{1}{|x|^\alpha} dx = \begin{cases} \ln x|_a^b & \alpha = 1 \\ \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

   Si $-\alpha + 1 > 0$ entonces la integral existe
   Si $-\alpha + 1 < 0$ entonces la integral no siempre existe(por ejemplo si a=0)
   $-\alpha + 1 > 0 \Longrightarrow \alpha < 1$ entonces $f(x)$ es FLI para $\alpha < 1$

Construcción de Distribuciones

Teorema 14

Una función localmente integrable $f(x)$ en $\mathbb{R}^n$ define (o genera) una distribución n-dimensional f mediante la regla

$$\begin{aligned} \langle f, \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}}^n f(x)\phi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\phi(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \end{aligned}$$

Prueba

Supongamos que $\langle f, \phi \rangle$ es un funcional lineal, donde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
Es lineal por linealidad de la integral, faltaria probar que es continuo
$\{\phi_m(x)\}$ sucesión nula en $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
\langle f, \phi_m \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi_m(x)dx \\
|\langle f, \phi_m \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi_m(x)dx \right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||\phi_m(x)|dx
\end{aligned}$$

Entonces $|\langle f, \phi_m \rangle| \leqslant \max_{x\in\mathbb{R}^n} |\phi_m(x)| \int_\Omega |f(x)|dx$ con Ω soporte común de $\{\phi_m(x)\}$, la integral existe ya que f es localmente integrable.

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to+\infty} |\langle f, \phi_m \rangle| &\leqslant \lim_{m\to+\infty} \max |\phi_m(x)| \int_\Omega |f(x)|dx \\
&= 0 \qquad (5)
\end{aligned}$$

La ecuación (5) $\Longrightarrow$ el funcional lineal es continuo.
Por lo tanto $\langle f, \phi \rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)dx$ es una distribución. $\diamondsuit$

Ejemplo 15

Sea $f(x) = \sin(x)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
f es localmente integrable, entonces podemos obtener su distribución o función generalizada

$$\langle \sin, \phi \rangle = \int \sin(x)\phi(x)dx$$

Propiedad 16

1. Si $f_1(x), f_2(x)$ son funciones continuas diferentes, entonces generan funciones diferentes.
2. Si $f_1(x), f_2(x)$ coinciden excepto en un conjunto de medida cero, ellas generan las mismas distribuciones, es decir, dos funciones son iguales casi en todas partes si

$$\int_\Omega |f_1 - f_2|dx = 0$$

Distribuciones Regulares y Singulares

Definición 17

Una distribución es regular si puede ser escrita en la forma del teorema anterior con $f(x)$ localmente integrable.
Todas las demás son distribuciones singulares.

Ejemplo 18

1. Sea $f(x) = c$ constante, es localmente integrable
   Genera la distribución regular $\langle c, \phi \rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} c\phi(x)dx$
2. Sea $I_\Omega = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases}$ es localmente integrable genera la distribución regular

$$\langle I_\Omega, \phi \rangle = \int_\Omega \phi(x)dx$$

3. Sea un punto ξ en $\mathbb{R}^n$, consideremos el funcional lineal $\langle \delta_\xi, \phi \rangle = \phi(\xi)$

$$\begin{aligned} \delta_\xi : & C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R} \\ : & \phi \longmapsto \phi(\xi) \end{aligned}$$

Para probar que este funcional define una distribución debemos probar que es continuo, dado $\{\phi_m(x)\}$ sucesión nula

$$\begin{aligned} \langle \delta_\xi, \phi \rangle = \phi_m(\xi) \Longrightarrow & \lim_{m\to+\infty} \langle \delta_\xi, \phi_m \rangle = \lim_{m\to+\infty} \phi_m(\xi) = 0 \\ \Longrightarrow & \langle \delta_\xi, \phi \rangle = \phi(\xi) \end{aligned}$$

Donde $\langle \delta_\xi, \phi \rangle = \phi(\xi)$ es una distribución, δ_ξ es una distribución singular.
Asumimos que es regular, entonces existe una función localmente integrable tal que

$$\int_{\mathbb{R}}^n f(x)\phi(x)dx = \phi(0)$$

donde $\xi = 0, \delta_0$ y para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$
Consideremos la función de prueba $\Psi_a(x) = \phi(\frac{x}{a})$

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right)} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

$$\phi_a(x) = \begin{cases} e^{\left(\frac{a^2}{|x|^2-a^2}\right)} & |x| < a \\ 0 & |x| \geqslant a \end{cases}$$

$\Longrightarrow \Psi_a(0) = e^{-1}$
$\Psi_a(x) \leqslant \frac{1}{e}$ (máximo), por lo tanto

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\Psi_a(x)dx \right| &\leqslant \frac{1}{e} \int_{|x|\leqslant a} |f(x)|dx \\ \lim_{a\to 0} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\Psi_a(x)dx \right| &\leqslant \frac{1}{e} \lim_{a\to 0} \int_{|x|\leqslant a} |f(x)|dx \end{aligned}$$

Por definición de δ_0 :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\Psi_a(x)dx &= \Psi_a(0) \\ &= \frac{1}{e} \end{aligned} \tag{6}$$

(6) $\Longrightarrow \lim_{a\to 0} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\Psi_a(x)dx \right| = \frac{1}{e} \rightarrow\!\leftarrow$
Entonces δ es una distribución singular $\langle \delta_0, \phi \rangle = \phi(0)$

Traslación de una Distribución

Sea $f(x)$ localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}^n$ entonces $f(x-a)$ es localmente integrable, entonces podemos ver a $f(x-a)$ como una distribución

$$\begin{aligned} \langle f(x-a), \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-a)\phi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\phi(z+a)dz \\ &= \langle f(x), \phi(x+a) \rangle \end{aligned}$$

En realidad $\langle f(x), \phi(x+a) \rangle$ define una distribución.

a. Es un funcional lineal continuo.

b. Si $\{\phi_m(x)\}$ es una sucesión nula, también lo es $\{\phi_m(x+a)\}$ entonces $\langle f(x), \phi(x+a) \rangle \longrightarrow 0$ cuando $m \to 0$
Entonces $\langle f(x-a), \phi \rangle = \langle f(x), \phi(x+a) \rangle$ define una distribución.

Ejemplo 19

Sea $\langle\delta_0,\phi\rangle=\phi(0)$ donde $\delta_0=\delta(x)$ $\qquad \delta_\xi(x)=\delta(x-\xi)$

$$\begin{aligned}\langle\delta(x-\xi),\phi\rangle &= \langle\delta(x),\phi(x+\xi)\rangle\\ &=\phi(0+\xi)\\ &=\phi(\xi)\\ \delta_\xi(x) &=\delta(x-\xi)\\ &=\phi(\xi)\end{aligned}$$

Expansión o Contracción de Distribuciones

Sea $f(x)$ localmente integrable. $f(\alpha x)$ es contracción si $\alpha\in(-1,1)$ con $\alpha\neq 0$
$f(\alpha x)$ es expansión si $|\alpha|>1 \Longrightarrow f(\alpha x)$ es localmente integrable.

$$\begin{aligned}\langle f(\alpha x),\phi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\alpha x)\phi(x)dx\\ &=\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha x_1,\dots,\alpha x_n)\phi(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n\\ &=\frac{1}{|\alpha|^n}\left\langle f(x),\phi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right\rangle\end{aligned}$$

Por definición será valido para cualquier distribución.

Ejemplo 20

1. *El dipolo eléctrico.* La distribución correspondiente a estas fuentes tiene la acción

$$\frac{1}{\epsilon}\left(\xi+\frac{\epsilon}{2}l\right)-\frac{1}{\epsilon}\left(\xi-\frac{\epsilon}{2}l\right)$$

   El dipolo unitario con eje en l se obtiene cuando $\epsilon\to 0$

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left[\phi\left(\xi+\frac{\epsilon}{2}l\right)-\phi\left(\xi-\frac{\epsilon}{2}l\right)\right] &= \frac{d\phi(\xi)}{dl}\\ &=\frac{d\delta(l-\xi)}{dl}\\ \phi(\xi) &=\delta_\xi(x)\\ &=\delta(x-\xi)\end{aligned}$$

   El dipolo unitario es una distribución singular.

2. La multiplicación de una función infinitamente derivable por una distribución.
   $a(x)$ localmente integrable y $f(x)$ localmente integrable.
   ¿Será $a(x)f(x)$ localmente integrable?

$$\begin{aligned}a(x) &= \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\\ f(x) &= \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\\ a(x)f(x) &= \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\\ &=\frac{1}{x}\end{aligned}$$

   No es localmente integrable.
   Entonces pedimos que $a(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

Entonces $a(x)\phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con estas condiciones $a(x)f(x)$ si es localmente integrable.

$$\begin{aligned}\implies \langle a(x)f(x), \phi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} a(x)f(x)\phi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)[a(x)\phi(x)]dx \\ &= \langle f(x), a(x)\phi(x)\rangle\end{aligned}$$

Entonces $\langle a(x)f(x), \phi\rangle = \langle f(x), a(x)\phi(x)\rangle$ para cualquier distribución.

3. Sea $a(x)\delta(x)$

$$\begin{aligned}< a(x)\delta(x), \phi > &=< \delta(x), a\phi > \\ &= a\phi(0) \\ &= a(0)\phi(0) \\ &= a(0)\delta(x)\end{aligned}$$

$a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$

Derivada de una Distribución

Sea $f(x), f'(x)$ localmente integrables $\langle f'(x), \phi(x)\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f'(x)\phi(x)dx$
Integrando por partes: $u = \phi(x), du = \phi'(x)dx, dv = f'(x)dx, v = f(x)$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f'(x)\phi(x)dx &= \phi(x)f(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi'(x)dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi'(x)dx \\ &= \langle f(x), -\phi'(x)\rangle\end{aligned}$$

entonces definimos las derivadas de cualquier distribución como $\langle f'(x), \phi(x)\rangle = \langle f(x), -\phi'(x)\rangle$
Las derivadas parciales

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \phi \right\rangle = \left\langle f, -\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle$$
$$\left\langle D^{\mathcal{K}} f, \phi \right\rangle = (-1)^{\mathcal{K}} \left\langle f, D^{\mathcal{K}}\phi \right\rangle$$

Ejemplo 21

1. Sea $H(x)$ la función de *Heaviside*

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

No es numerable en todo $\mathbb{R}$, pero es localmente integrable
entonces $H(x)$ puede verse como una distribución regular

$$
\begin{aligned}
\langle H, \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\phi(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)dx \\
\langle H', \phi \rangle &= \langle H, -\phi'(x) \rangle \\
&= \int_{0}^{+\infty} -\phi(x)dx \\
&= -\phi(x)\Big|_{0}^{+\infty} \\
&= -[0 - \phi(0)] \\
&= \phi(0) \\
&= \delta(x)
\end{aligned}
$$

$\therefore H'(x) = \delta(x)$

2. Sea $f(x) = \sin(x)$ localmente integrable

$$
\begin{aligned}
\langle \sin, \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x)\phi(x)dx \\
\langle \sin', \phi \rangle &= \langle \cos, \phi \rangle
\end{aligned}
$$

Cálculo para Funciones con Saltos

Tenemos que $H'(x) = \delta(x)$

$$
\begin{aligned}
< f', \phi > &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{a} f(x)\phi'(x)dx - \int_{a}^{+\infty} f(x)\phi'(x)dx \\
&= -\Big[f(x)\phi(x)\Big|_{-\infty}^{a} - \int_{-\infty}^{a} f'(x)\phi(x)dx \Big] - \Big[f(x)\phi(x)\Big|_{a}^{+\infty} - \int_{a}^{+\infty} f'(x)\phi(x)dx \Big] \\
&= -\Big[\lim_{x\to a^-} f(x)\phi(x) - \lim_{x\to a^+} f(x)\phi(x) \Big] + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x)dx \\
&= -\Big[\Big(\lim_{x\to a^-} f(x) - \lim_{x\to a^+} f(x) \Big)\phi(a) \Big] + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\phi(x)dx \\
&= \Delta f(a)\delta(x-a) + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\phi(x)dx
\end{aligned}
$$

entonces en forma general para un número finito de puntos(con saltos) $a_1, \ldots, a_k$) tenemos que

$$
f' = [f'] + \sum_{i=1}^{k} \Delta f_i \delta(x - a_i)
$$

donde f' es la derivada en sentido de distribución, mientras que $[f']$ es la derivada clásica, sin considerar los puntos donde la derivada clásica no existe.

Derivadas de Orden Superior

Un punto de discontinuidad en $a = 0$

$$
\begin{aligned}
f' &= [f'] + \Delta f^0(0)\delta(x) \\
f'' &= [f''] + \Delta f'(0)\delta(x) \\
&\vdots \\
f^m &= [f^m] + \Delta f^{m-1}(0)\delta(x) + \Delta f^{m-2}(0)\delta'(x) + \ldots + \Delta f^0(0)\delta^{m-1}(x)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 22

1. Sea $f(x) = e^{-x}$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ e^{x} & x < 0 \end{cases} \\
< f', \phi > &= f'(x) \\
&= [f'] + \Delta f(0)\delta(x) \\
&= \begin{cases} -e^{-x} & x > 0 \\ e^{x} & x < 0 \end{cases} \\
< f'', \phi > &= [f''] + \Delta f'(0)\delta(x) + \Delta f^{0}(0)\delta'(x) \\
&= [f''] + 2\delta(x) \\
f''(x) &= \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ e^{x} & x < 0 \end{cases} \\
&= f
\end{aligned}$$

$f''(x) = f(x) - 2\delta(x) \Longrightarrow f''(x) - f(x) = 2\delta(x)$ es una ecuación diferencial en distribuciones.

2. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & |x| \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

calcular f', f'' y representarlas graficamente.
$\delta(x - \frac{\pi}{2}) + \delta(x + \frac{\pi}{2})$

3. Demostrar que $(x^2 + 1)\delta'(x) = \delta'(x)$

$$\begin{aligned}
< a\delta', \phi > &=< \delta', a\phi > \\
&=< \delta, -(a\phi)' > \\
&=< \delta, -(a'\phi + a\phi') > \\
&=< \delta, -(2x\phi + (x^2 + 1)\phi')) > \\
&= -[2(0)\phi(0) + (0 + 1)\phi'(0)] \\
&= -[-\phi'(0)] \\
&= -[-\delta'(x)] \\
&= \delta'(x)
\end{aligned}$$

usando $\delta(x) = \phi(0), \delta'(x) = -\delta'(0), < \delta(x), \phi >= \phi(0)$

Ejercicio 23

1. Dado que $\phi(z) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \{\dfrac{1}{m}\phi(mx)\}$ no es una sucesión nula
$(\Longrightarrow) A = \{z \in \mathbb{R}^n | \phi(z) \neq 0\}$
$|z| < k$
$|mx| < k$
$|x| < \frac{k}{m} < k$ en donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $m \to +\infty$
$(\Longleftarrow) \lim \max \left| D^{\mathcal{K}} \left(\frac{1}{m}\phi(mx)\right)\right| = 0$

$$\begin{aligned}
\max_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{m} D^{\mathcal{K}} \phi(mx) \right| &= \max_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(mx) \right| \\
&= \max_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{m} m \frac{\partial}{\partial y} \phi(y) \right| \\
&= \max_{x \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial}{\partial y} \phi(y) \right| \\
&\neq \delta
\end{aligned}$$

$\therefore$ no es una sucesión nula.

2. Probar que $\left\langle D^{\mathcal{K}} f, \phi \right\rangle = (-1)^{\mathcal{K}} \left\langle f, D^{\mathcal{K}} \phi \right\rangle$
Por definición

$$\begin{aligned}
\left\langle D^{\mathcal{K}} f, \phi \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^K f}{\partial^{K_1} x_1 \ldots \partial^{K_n} x_n}, \phi \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial^{K_2+K_3+\ldots+K_n} f}{\partial^{K_2} x_2 \ldots \partial^{K_n} x_n}, \frac{(-1)^{K_1} \partial^{K_1} \phi}{\partial^{K_1}} \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial^{K_3+K_4+\ldots+K_n} f}{\partial^{K_1} x_3 \ldots \partial^{K_n} x_n}, \frac{(-1)^{K_1} (-1)^{K_2} \partial^{K_1+K_2} \phi}{\partial^{K_1} x_1 \partial^{K_2} x_2} \right\rangle \\
&= \left\langle f, (-1)^{|\mathcal{K}|} D^{\mathcal{K}} \phi \right\rangle \\
&= (-1)^{|\mathcal{K}|} \left\langle f, D^{\mathcal{K}} \phi \right\rangle
\end{aligned}$$

3. Sea $a(x)$ una función infinitamente diferenciable y $f(x)$ una función arbitraria generalizada.
Mostrar que $[a(x)f(x)]' = a(x)f'(x) + a'(x)f(x)$

$$\begin{aligned}
\langle [a(x)f(x)]', \phi(x) \rangle &= \langle a(x)f(x), -\phi(x) \rangle \\
&= \langle f(x), -a(x)\phi'(x) \rangle \\
&= \langle f(x), -\phi'(x)a(x) + a'(x)\phi(x) - a'(x)\phi(x) \rangle \\
&= \langle f(x, -[\phi'(x)a(x) + a'(x)\phi(x)] \rangle + \langle f(x), a'(x)\phi(x) \rangle \\
&= \langle a(x)f(x), \phi(x) \rangle + \langle a'(x)f(x), \phi(x) \rangle \\
&= a(x)f'(x) + a'(x)f(x)
\end{aligned}$$

Ecuaciones Diferenciales en Distribuciones

Propiedades Locales

Definición 24

La distribución f se dice que se anula en el conjunto abierto Ω si $\langle f, \phi \rangle = 0$ para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con soporte en Ω. Dos distribuciones f_1, f_2se dice que son iguales en Ω si $f_1 - f_2$ se anula en Ω

Ejemplo 25

Sea Ω el abierto que consiste de todo $\mathbb{R}^n$ sin el origen, entonces $\delta(x)$ se anula en Ω
Consideremos la siguiente ecuación diferencial $u' = f$ en $\mathbb{R}$
En el sentido de distribuciones $\langle u', \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle$
Iniciamos con el problema homogeneo $u' = 0$
$\forall \quad \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \langle u', \phi \rangle = 0 \Longrightarrow \langle u', -\phi' \rangle = 0$
$-\phi'$ funciones de prueba que son derivadas de otras funciones de prueba.
No es cierto que toda función de prueba se podrá escribir como la derivada de otra.
Sea $M \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ el conjunto de funciones de prueba que son primera derivada de funciones de prueba.

Lema 26

Sea $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ donde $\phi \in M$ si y solo si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)dx = 0$

Prueba

$(\Longrightarrow)\phi \in M \Longrightarrow \phi = \Psi'$ donde $\Psi \in C_0^\infty$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x)dx \\
&= \Psi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} \\
&= \Psi(+\infty) - \Psi(-\infty) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{7}$$

$(\Longleftarrow)\Psi = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \phi(x)dx$ por (7) $= 0$ y $\phi \in C_0^\infty \Longrightarrow \Psi \in C_0^\infty$
derivando $\Psi' = \phi \Longrightarrow \phi \in M \qquad \diamondsuit$

Lema 27

Sea $\phi(x)$ una función fija (arbitraria) de prueba tal que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_0(x)dx = 1$ entonces para cada $\phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ existe una única constante a y una única $\Psi \in M$ tales que

$$\begin{aligned} \phi(x) &= a\phi_0(x) + \Psi(x) \\ \langle u, \phi\rangle &= a\,\langle u, \phi_0\rangle + \langle u, \Psi\rangle \end{aligned}$$

Si $u' = 0$ entonces $\langle u, \Psi\rangle = 0$ donde $\Psi \in M$

$$\begin{aligned} \langle u, \phi\rangle &= a\,\langle u, \phi_0\rangle \\ &= \langle c, \phi\rangle \\ a &= \int_{-\infty}^{x} \phi(x)dx \\ &= \langle 1, \phi\rangle \end{aligned}$$

Deel (Lema 27) entonces la solución $u' = 0$ es una constante en el sentido de distribuciones
Con este resultado se puede determinar la solución de $u' = f$

$$\langle u, \phi\rangle = c\,\langle 1, \phi\rangle + \langle u_p, \phi\rangle$$

Con $\langle u_p, \phi\rangle = -\langle f, \chi\rangle$ y $\Psi = \chi'$ donde $\chi = \displaystyle\int_0^x \Psi(s)ds$

Formula de Green e Identidad de Lagrange

Teniendo a $L = a_2D^2 + a_1D + a_0$ con $D, a_k(x) \in C^2(\mathbb{R})$
Sean $u, v \in C^2(\mathbb{R})$ entonces:

$$\begin{aligned} \int_a^b vLudx &= \int_a^b v[a_2D^2u + a_1Du + a_0u]dx \\ &= \int_a^b [a_2vD^2u + a_1vDU + a_0vu]dx \end{aligned}$$

Integrando por partes hasta eliminar las derivadas en u

$$\int_a^b a_2vD^2udx$$
$$\int_a^b a_1vDudx$$

Después de efectuar estos calculos nos queda la formula de *Green*

$$\int_a^b vLudx - \int_a^b uL^*vdx = J(u,v)\Big|_a^b$$

$L^* = a_2D^2 + (2a_2' - a_1)D + (a_2'' - a_1' + a_0)$ en donde L^* es un operador formal autoadjunto
$J(u,v) = a_2(vu' - uv') + (a_1 - a_2')uv$ donde $u, v \in C^2(\mathbb{R})$
Si $L = L^*$ entonces L es el operador formal autoadjunto.
En forma diferencial derivando respecto a a y b, entonces tenemos (haciendo b=x)
$vLu - uL^*v = \frac{d}{dx}J(u,v)$ identidad de *Lagrange*
En que caso $L = L^*$

$$\begin{aligned} 2a_2' - a_1 = a_1 &\Longrightarrow a_2' = a_1 \\ a_2'' - a_1' + a_0 = a_0 &\Longrightarrow a_2'' - a_1' = 0 \\ &\Longrightarrow a_2' - a_1' = 0 \end{aligned}$$

cuando $a_2' = a_1$ se tiene que

$$\begin{aligned} L^* &= a_2 D^2 + a_2' D + a_0 \\ &= D(a_2 D) + a_0 \end{aligned}$$

Este resultado puede generalizarse para ecuaciones diferenciales ordinarias de orden p

$$L = a_p(x)D^p + \ldots + a_1(x)D + a_0(x); a_k(x) \in C^p(\mathbb{R})$$

Si $u, v \in C^p(\mathbb{R}) \Longrightarrow vLu - uL^*v = \dfrac{d}{dx}J(u,v)$

$$\begin{aligned} \int_a^b vLudx - \int_a^b uL^*vdx &= J(u,v)\Big|_a^b \\ L^*v &= \sum_{m=0}^{p}(-1)^m D^m(a_m v) \\ J(u,v) &= \sum_{m=1}^{p}\sum_{j+k=m-1}(-1)^k D^k(a_m v)D^j u \end{aligned}$$

Cuando $L = L^*$ solo puede ser autoadjunto si L es par, si p es impar no puede ser autoadjunto. el coeficiente principal de L es $a_p(x)$ y el de L^* es $-a_p(x) \neq a_p(x)$
Para el caso de ecuaciones diferenciales parciales en $\mathbb{R}^n$ tenemos relaciones como:

$$\begin{aligned} v\nabla^2 u - u\nabla^2 v &= \nabla\cdot(v\nabla u - u\nabla v) \\ \int_\Omega (v\nabla^2 u - u\nabla^2 v)dx &= \int_\Gamma n\cdot(v\nabla u - u\nabla v)ds \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \end{aligned}$$

$L = \nabla$ y $L^* = \nabla^2$ (también es eutoadjunto)
Para un operador lineal arbitrario de orden p

$$\begin{aligned} Lu &= \sum_{|k|<p} a_k(x)D^k u \\ L^*v &= \sum_{|k|\leqslant p}(-1)^|k|D^k(a_k v) \end{aligned}$$

J es muy complicado para escribir una forma general
$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^\kappa$ y $\mathcal{K} = (k_1, \ldots, k_n)$

Ejemplo 28

Sea $x \in \mathbb{R}^n, p = 2, L = \nabla^2$. Probar que L es autoadjunto

$$\begin{aligned} L &: a_{0\ldots0}(x) = 0 \\ &: a_{0\ldots010\ldots0}(x) = 0 \\ &: a_{0\ldots010\ldots010\ldots0}(x) = 0 \\ &: a_{20\ldots0}(x) = a_{0\ldots020\ldots0}(x) = 1 \end{aligned}$$

entonces $L^*v = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}$

Soluciones en Sentido clásico, Débil y Distribucional

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{du}{dx} = f(x)$ en $\Omega = (a,b)$.
Si $f(x)$ es continua podemos definir lo que es una solución en sentido clásico.

$u(x)$ es una solución en sentido clásico de $\dfrac{du}{dx} = f(x)$ en Ω.
Si $u(x)$ es continuamente derivable en Ω y satisface la ecuación diferencial.
Si $f(x)$ es continua $\Longrightarrow$ es localmente integrable y es cierto que:

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{dx}\phi(x)dx &= \int_a^b f(x)\phi(x)dx \\
&= u(x)\phi(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x)\phi'(x)dx \\
&= u(b)\phi(b) - u(a)\phi(a) - \int_a^b u(x)\phi'(x)dx \\
-\int_a^b u\phi' dx &= \int_a^b f\phi dx \\
-\langle u, \phi' \rangle &= \langle f, \phi \rangle
\end{aligned}$$

Donde $f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con soporte en Ω y $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$
la integración por partes $w = \phi(x) \quad dw = \phi'(x)dx \quad dz = \dfrac{du}{dx}dx \quad z = u$
Si f es localmente integrable, entonces una función localmente integrable es una solución débil de $\dfrac{du}{dx} = f$ si y solo si satisface:

$$\begin{aligned}
-\langle u, \phi' \rangle &= \langle f, \phi \rangle \\
-\int_\Omega u\phi' dx &= \int_\Omega f\phi dx
\end{aligned}$$

También se puede interpretar la solución en sentido distribucional de la siguiente manera:
Si f es una distribución, decimos que una distribución $u(x)$ es solución de $\dfrac{du}{dx} = f(x)$ si y solo si $-\langle u, \phi(x) \rangle = \langle f, \phi \rangle$ para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= f(x) \\
\left\langle \frac{du}{dx}, \phi \right\rangle &= \langle f(x), \phi \rangle \\
-\langle u, \phi \rangle &= \langle f(x), \phi \rangle
\end{aligned}$$

Asumiendo $a_k(x) \in C^\infty$, la distribución Lu siempre existe para cualquier distribución u

$$\begin{aligned}
L &= \sum_{|k| \leqslant p} a_k(x) D^k \\
< Lu, \phi > &=< u, L^*\phi > \\
L^* &= \sum_{|k| \leqslant p} (-1)^{|k|} D^k a_k \\
Lu &= f
\end{aligned}$$

Entonces en distribuciones la solución debe satisfacer $< u, L^*\phi >=< f, \phi >$ para todo $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

Definición 29

Sea f localmente integrable, una función localmente integrable u que satisface $\langle u, L^*\phi \rangle = \langle f, \phi \rangle$ se llama solución débil de $Lu = f$ en Ω

Teorema 30

Sea $f(x)$ continua en Ω entonces:

a. Una solución clásica de $Lu = f$ en Ω es también una solución débil.

b. Cualquier solución débil en Ω que tenga p derivadas continuas es una solución clásica.

Demostración

a. f continua $\Longrightarrow$ localmente integrable
Si $Lu = f$ en Ω

$$\begin{aligned}\langle Lu, \phi\rangle &= \langle f, \phi\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} Lu\phi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi Lu dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} uL^*\phi dx + J(u,\phi)\Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \int_{\mathbb{R}} uL^*\phi dx \\ &= \langle u, L^*\phi\rangle\end{aligned}$$

Entonces $\langle u, L^*\phi\rangle = \langle f, \phi\rangle$, entonces u es solución débil $\square$
b. Si $\langle u, L^*\phi\rangle = \langle f, \phi\rangle$ por la formula de *Green*

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow \langle u, L^*\phi\rangle = \langle Lu, \phi\rangle \\ &\Longrightarrow \langle Lu, \phi\rangle = \langle f, \phi\rangle \\ &\Longrightarrow \int_{\Omega} (Lu - f)\phi dx = 0\end{aligned}$$

$\langle Lu - f, \phi\rangle = 0$ por linealidad de las distribuciones, para todo $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$
Necesitamos probar que $Lu - f = 0$, asumiendo lo contrario.
Existe un punto x_0 tal que $(Lu - f)(x_0) \neq 0$ (asumamos $(Lu - f)(x_0) > 0$)
f es continua y como u es continuamente derivable hasta orden p
$\Longrightarrow$ Lu es continua y por lo tanto $Lu - f$ también es continua
$\Longrightarrow$ existe una vecindad de Ω alrededor de x_0 tal que $(Lu - f)(x) > 0$
Escogiendo ϕ tal que $\phi(x) > 0$ en esa vecindad, entonces $(Lu - f)\phi(x) > 0$ en esa vecindad contenida en Ω lo cual nos lleva a que $\int_{\Omega}(Lu - f)\phi dx > 0 \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\times\!\!\!\longleftarrow$ $\therefore Lu - f = 0 \Longrightarrow Lu = f$ en Ω, es decir u es solución clásica. $\square$

Ejemplo 31

1. Sea $x\dfrac{du}{dx} = 0$ donde $x \in \mathbb{R}$
   $u(x) = H(x)$ es una solución débil

$$\begin{aligned}\left\langle x\frac{dH}{dx}, \phi\right\rangle &= \left\langle \frac{dH}{dx}, x\phi(x)\right\rangle \\ &= \langle \delta(x), x\phi(x)\rangle \\ &= x\phi(0) \\ &= 0\cdot \phi(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

   Entonces $u = H(x)$ es solución en sentido distribucional, pero como H es localmente integrable entonces es solución en sentido débil, pero no existe solución clásica en todo $\mathbb{R}$.

2. Dado $x \in \mathbb{R}^2$ y $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} = 0$
   Solución clásica $u(x_1, x_2) = g(x_2)$

Solución débil $u(x_1, x_2) = H(x_2)$

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial H(x_2)}{\partial x_1}, \phi \right\rangle &= -\left\langle H(x_2), \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} H(x_2)\frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(x_2)dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_1 \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \phi(x_1, x_2)\Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ &= 0\end{aligned}$$

Soluciones Fundamentales

Definición 32

Una solución fundamental para L con polo en ξ es una solución de la ecuación $Lu = \delta(x-\xi)$ donde ξ se trata como un parámetro.

Consideración 33

Se debe interpretar en el sentido de distribuciones:
Una solución de $Lu = \delta(x-\xi)$ se denota por $E(x, \xi)$
E satisface $Lu = \delta_\xi$ si y solo si $< E, L^*\phi >= \phi(\xi)$
L con coeficientes constantes, es suficiente encontrar la solución fundamental con polo en 0 (E(x,0)) y con una traslación obtener $E(x, \xi) = E(x-\xi, 0)$

Ejemplo 34

Determinar una solución fundamental E donde q constante y $x \in \mathbb{R}$ para $-\dfrac{d^2}{dx^2} + q^2$

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q^2$$

Como los coeficientes son constantes es suficiente determinar $E(x, 0)$ $\quad LE = \delta(x)$
Supongamos que $E(x, 0) = \dfrac{e^{-q|x|}}{2q}$
Para probar que es solución fundamental simplemente debemos mostrar que $\langle E, L^*\phi\rangle = \phi(0)$
Sabemos que $a_2 = -1 \quad a_1 = 0 \quad a_0 = q^2 \Longrightarrow L^* = L$ ya que $a_2' = a_1 = 0$

$$\begin{aligned}\langle E, L^*\phi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} EL^*\phi dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} EL^*\phi dx + \int_{0}^{+\infty} EL^*\phi dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} \phi LE dx - J(E,\phi)\Big|_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{+\infty} \phi LE dx - J(E,\phi)\Big|_{0}^{+\infty} \\ &= \int_{-\infty}^{0} \phi L\left(\frac{e^{-q|x|}}{2q}\right) dx - J(E,\phi)\Big|_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{+\infty} \phi L\left(\frac{e^{-q|x|}}{2q}\right) dx - J(E,\phi)\Big|_{0}^{+\infty} \\ &= 0 + \left[\frac{\phi(0)}{2} - \frac{\phi'(0)}{2q} - 0\right] + 0 + \left[0 + \frac{\phi(0)}{2} + \frac{\phi'(0)}{2q}\right] \\ &= \phi(0)\end{aligned}$$

Método de Elemento Finito

Para introducir el método consideramos un problema modelo, un problema de valor de frontera de segundo orden

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{du}{dx}\right) + r(x)u = f(x) & a < x < b \\ u(a) = A & u(b) = B \end{cases} \tag{8}$$

donde $p \in C'[a,b] \quad r \in C[a,b] \quad f \in L^2[a,b]$
$p(x) \geqslant C_0 > 0 \quad r(x) \geqslant 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$
Mucho de lo desarrollado para este modelo se puede extender hasta problemas de ecuaciones diferenciales parciales, el método de elementos finitos aproxima la solución de una ecuación diferencial en la forma de funciones (generalmente polinómicas) definidas por partes
Aqui consideraremos dos técnicas para la construcción de las aproximaciones del método de elementos finitos

Principio de *Rayleigh-Ritz* El problema de valor de frontera es planteado como un problema variacional (restringido a problemas simétricos)

Principio de *Galerkin* Es una formulación débil del problema de ecuaciones diferenciales, es de aplicación más general

Definición

Una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama absolutamente continua si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda familia $\{(a_i, b_i)\}$ de intervalos disjuntos en $[a,b]$ tales que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ se cumple $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$
se denota por $AC[a,b]$ al conjunto de todas las funciones absolutamente continuas en $[a,b]$

Propiedades

1. $AC[a,b] \subseteq C[a,b]$
2. $AC[a,b]$ es un espacio vectorial
3. Sean $f \in L'[a,b]$
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Longrightarrow F \in AC[a,b]$$
4. $AC[a,b] \subseteq BV[a,b] \quad V\!:$ variacional acotado
5. Sea $f \in AC[a,b] \Longrightarrow f$ es derivable en todo punto de $[a,b]$
6. Sea $f \in AC[a,b]$, supongamos que $f' = 0$ casi todo punto $\Longrightarrow f$ es constante en $[a,b]$
7. Sea $f \in AC[a,b] \Longrightarrow f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(x)\,dx$

Definición

Para un entero positivo k, definimos el espacio de *Sobolev* $H^k(a,b)$ como el conjunto de funciones reales v, definidas en $[a,b]$ tal que v y todas sus derivadas de orden hasta $k-1$ son absolutamente continuas en $[a,b]$

$$\begin{aligned} v^k &= \frac{d^k v}{dx^k} \in L^2(a,b) \\ v \in L^2(a,b) \iff \|v\|_2 &= \|v\|_{L^2(a,b)} \\ &= \left(\int_a^b |v(x)|^2\,dx\right)^{1/2} < +\infty \end{aligned}$$

equiparamos $H^k(a,b)$ con la norma de *Sobolev*

$$\|v\|_{H^k(a,b)} = \left(\sum_{m=0} \|v^n\|^2_{L^2(a,b)}\right)^{1/2}$$

los espacios de *Sobolev* $H'(a,b)$, $H^2(a,b)$ serán muy importantes en está introducción al método de elemento finito
$H'(a,b)$ si $v \in H'(a,b)$
$\begin{cases} v \in AC[a,b] \\ v \in L^2[a,b] \end{cases}$

$$\|v\|_{H'(a,b)} = \left(\|v\|^2_{L^2} + \left\|v^{(1)}\right\|^2_{L^2}\right)^{1/2}$$

Definición

1. Dados A, B números reales. $H'_E(a,b)$ denotará el conjunto de funciones $v \in H'(a,b)$ tal que $v(a) = A$ y $v(b) = B$

2. $H'_0(a,b)$ denotará el conjunto de funciones $v \in H'(a,b)$ tal que $v(a) = 0$ y $v(b) = 0$

Principio de Rayleigh-Ritz y Galerkin

El principio de *Rayleigh-Ritz* consiste en convertir el problema de valor de frontera, (9) en un problema variacional que involucra la minimización de un funcional cuadrático en un espacio de funciones
definamos el funcional cuadrático $\mathcal{J} : H'_E(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente forma

$$\mathcal{J}(w) = \frac{1}{2}\int_a^b \left[p(x)(w')^2 + r(x)w^2\right] dx - \int_a^b f(x)w(x)\,dx$$

consideramos ahora el problema variacional.
Determinar $u \in H'_E(a,b)$ tal que $\mathcal{J}(u) = \min\limits_{w \in H'_E(a,b)} \mathcal{J}(w)$
a este problema variacional lo llamaremos el principio de *Rayleigh-Ritz*
definiendo $\mathcal{A}(w,v) = \displaystyle\int_a^b [p(x)w'(x)v'(x) + r(x)w(x)v(x)]\,dx$
recordando el producto interior en $L^2(a,b)$

$$\langle w, v\rangle = \int_a^b w(x)v(x)\,dx$$

entonces $\mathcal{J}(w) = \dfrac{1}{2}\mathcal{A}(w,w) - \langle f, w\rangle$ donde $w \in H'_E(a,b)$
la aplicación $\mathcal{A} : H'(a,b) \times H'(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es función bilineal.

Principio de Galerkin

A la identidad $\mathcal{A}(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \forall\, v \in H'_0(a,b)$ se le llama principio de *Galerkin*

Teorema

Una función $u \in H'_E(a,b)$ minimiza $\mathcal{J}(\cdot)$ en $H'_E(a,b)$ si y solo si $\mathcal{A}(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \forall\, v \in H'_0(a,b)$
el principio de *Rayleigh-Ritz* se cumple si y solo si se cumple el principio de *Galerkin.*
Demostración
$\Longrightarrow$ Asumimos $u \in H'_E(a,b)$ minimiza $\mathcal{J}(\cdot)$ en $H'_E(a,b)$ o sea que $\mathcal{J}(u) \leqslant \mathcal{J}(w) \quad \forall\, w \in H'_E(a,b)$
$w = u + \lambda v \quad v \in H'_0(a,b) \quad \lambda \in \mathbb{R}$

como $u \in H'_E(a,b) \Longrightarrow w \in H'_E(a,b)$
$\lambda > 0$ y v puede ser positivo o negativo

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(u) \leqslant \mathcal{J}(w) =& \ \mathcal{J}(u+\lambda v) \\
=& \ \frac{1}{2}\mathcal{A}(u+\lambda v, u+\lambda v) - \langle f, u+\lambda v\rangle \\
=& \ \frac{1}{2}\Big[\mathcal{A}(u,u) + \lambda\mathcal{A}(u,v) + \lambda\mathcal{A}(v,u) + \lambda^2\mathcal{A}(v,v)\Big] - \lambda\langle f,v\rangle - \langle f,u\rangle \\
=& \ \underbrace{\frac{1}{2}\mathcal{A}(u,u) - \langle f,u\rangle}_{\mathcal{J}(u)} + \lambda\mathcal{A}(u,v) + \frac{1}{2}\lambda^2\mathcal{A}(v,v) - \lambda\langle f,v\rangle \\
=& \ \mathcal{J}(u) + \lambda[\mathcal{A}(u,v) - \langle f,v\rangle] + \frac{1}{2}\lambda^2\mathcal{A}(v,v) \\
\Longrightarrow 0 \leqslant& \ \lambda[\mathcal{A}(u,v) - \langle f,v\rangle] + \frac{1}{2}\lambda^2\mathcal{A}(v,v) \\
\Longrightarrow 0 \leqslant& \ \mathcal{A}(u,v) - \langle f,v\rangle + \frac{1}{2}\lambda\mathcal{A}(v,v)
\end{aligned}$$

tomamos el limite cuando $\lambda \to 0$

$$0 \leqslant \mathcal{A}(u,v) - \langle f,v\rangle$$

ahora consideremos que $v = -v$

$$\Longrightarrow 0 \leqslant -\mathcal{A}(u,v) + \langle f,v\rangle + \frac{1}{2}\lambda\mathcal{A}(v,v)$$

tomando lim $\lambda \to 0$

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant -\mathcal{A}(u,v) + \langle f,v\rangle \\
0 &\geqslant \mathcal{A}(u,v) - \langle f,v\rangle
\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathcal{A}(u,v) - \langle f,v\rangle = 0 \quad \forall\, v \in H'_0(a,b)$ $\square$

Principio de Galerkin y Problema de Valor de Frontera

Definición

Si una función $u \in H'_E(a,b)$ satisface el principio de *Galerkin*, se dice que es una solución débil al problema de valor de frontera (9) y el principio de *Galerkin* es referido con la formulación débil del problema de valor de frontera (9)

Teorema 14.2

Si $u \in H^2(a,b) \cap H'_E(a,b)$ es una solución débil del problema de valor de frontera (9), entonces u es una solución débil de dicho problema, es decir $\mathcal{A}(u,v) = \langle f,v\rangle \quad \forall\, v \in H'_0(a,b)$

Demostración

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{du}{dx}\right] + r(x)u = f(x) & \\ u(a) = A & u(b) = B \end{cases}$$

multipliquemos la ecuación diferencial por $v \in H'_0(a,b)$

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] v(x) + r(x)u(x)v(x) = f(x)v(x)$$

integrando $\displaystyle\int_a^b -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] v(x)\,dx + \int_a^b r(x)u(x)v(x)\,dx = \int_a^b f(x)v(x)\,dx$
integrando por partes una vez

$$\begin{aligned}\int_a^b -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] v(x)\,dx &= \overbrace{-v(x)p(x)\frac{du}{dx}}^{0} + \int_a^b p(x)u'v'\,dx & w &= v(x) & z &= -p(x)\frac{du}{dx}\\ &= \int_a^b p(x)u'v'\,dx & w' &= v' & dz &= -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] dx\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\int_a^b p(x)u'(x)v'(x)\,dx + \int_a^b r(x)u(x)v(x)\,dx &= \int_a^b f(x)v(x)\,dx \quad \forall\, v \in H_0'(a,b)\\ \underbrace{\int_a^b [p(x)u'(x)v'(x) + r(x)u(x)v(x)]\,dx}_{\mathcal{A}(u,v)} &= \int_a^b f(x)v(x)\,dx\\ &= \langle f, v\rangle\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathcal{A}(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \forall\, v \in H_0'(a,b) \qquad \square$
lo inverso del teorema 14.2 no es cierto en general al menos que u sea lo suficientemente suave

Teorema 14.3

El problema de valor de frontera (9) posee a lo más una solución débil en $H_E'(a,b)$
Demostración
Supongamos que $u, w \in H_E'(a,b)$ son dos soluciones debiles diferentes al problema de valor de frontera (9)
$u - w \in H_0'(a,b)$

$$\begin{aligned}(u-w)(a) &= u(a) - w(a) & \qquad (u-w)(b) &= u(b) - w(b)\\ &= A - A & &= B - B\\ &= 0 & &= 0\end{aligned}$$

por ser soluciones debiles, en particular $v = u - w$

$$\mathcal{A}(u-w, u-w) = 0$$

como $p(x) \geqslant C_0 > 0$ y $r(x) \geqslant 0$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(v,v) &= \int_a^b \left[p(x)(v')^2 + r(x)v^2\right] dx\\ &\geqslant \int_a^b \left[C_0(v')^2 + \underbrace{r(x)v^2}_{>0}\right] dx\\ &\geqslant C_0\int_a^b (v')^2\,dx\\ \Longrightarrow \mathcal{A}(u-w,u-w) &= 0\\ &\geqslant C_0\int_a^b [(u-w)']^2\,dx\\ \Longrightarrow \int_a^b [(u-w)']^2\,dx &= 0\end{aligned}$$

$(u-w)' = 0$ casi todas partes
como $u, w \in H_0'(a,b)$ entonces son absolutamente continuas
$u - w$ también es absolutamente continua
si $(u-w)' = 0$ en casi todo punto $\Longrightarrow u - w = \text{cte}$ en $[a,b]$
$(u-w)(a) = (u-w)(b) = 0 \Longrightarrow u - w = 0$ en $[a,b]$
$\therefore\ u = w \qquad \square$

Formulación del Método de Elemento Finito

El método de elementos finitos se basa en la construcción de una solución aproximada u^h al problema mediante la minimización de $\mathcal{J}(\cdot)$ en un subespacio de dimensión finita S_E^h de $H_E'(a,b)$ donde $S_E^h \subset H_E'(a,b)$
una manera sencilla de construir S_E^h es seleccionando una función $\Psi \in H_E'(a,b)$; por ejemplo

$$\Psi(x) = \frac{B-A}{b-a}(x-a) + A \Big/ \Psi(a) = A \wedge \Psi(b) = B$$

y un conjunto finito $\varphi_j(x) \quad (j = 1, \ldots, n-1)$ linealmente independientes en $H_0'(a,b)$ para $n \geqslant 2$, entonces definimos

$$S_E^h = \left\{ v^h \in H_E'(a,b) \,:\, v^h(x) = \Psi(x) + \sum_{i=1}^{n} v_i \varphi_i(x) \quad v = \left(v_1, \ldots, v_{n-1}\right)^T \right\}$$

$v \in \mathbb{R}^{n-1}$, v_i son los coeficientes de la combinación lineal
asi se plantea el problema de aproximación de *Rayleigh-Ritz*: determinar $u^h \in S_E^h$ tal que

$$\mathcal{J}\left(u^h\right) = \min_{w^h \in S_E^h} \mathcal{J}\left(w^h\right)$$

Teorema 14.4

Una función $u^h \in S_E^h$ minimiza $\mathcal{J}(\cdot)$ en S_E^h si y solo si $\mathcal{A}\left(u^h, v^h\right) = \left\langle f, v^h \right\rangle \quad \forall\, v^h \in S_0^h$

$$S_0^h(a,b) = \left\{ v^h \in H_0'(a,b) \,:\, v^h(x) = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \varphi_i(x) \right\}$$

al problema de determinar u^h tal que $\mathcal{A}\left(u^h, v^h\right) = \left\langle f, v^h \right\rangle \quad \forall\, v^h \in S_0^h$ se le llama problema de aproximación del principio de *Galerkin* (método de *Galerkin*)

Definición

Las funciones $\varphi_i \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$ se llaman funciones base de *Galerkin*

Teorema 14.5

Existe una única función $u^h \in S_E^h$ que minimiza $\mathcal{J}(\cdot)$ en S_E^h, este u^h se llama la aproximación a $u(x)$ de *Ritz*. Equivalentemente existe una única función $u^h \in S_E^h$ que satisface $\mathcal{A}\left(u^h, v^h\right) = \left\langle f, v^h \right\rangle$ este u^h se denomina la aproximación a u de *Galerkin*, las dos aproximaciones coinciden.
Demostración
Probemos aplicando el principio de *Galerkin*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\left(u^h, v^h\right) &= \left\langle f, v^h \right\rangle \quad \forall\, v^h \in S_0^h \\ v^h &= \sum_{i=1}^{n-1} v_i \varphi_i(x) \end{aligned}$$

observemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\left(u^h, \sum_{i=1}^{n-1} v_i \varphi_i(x)\right) &= \left\langle f, \sum_{i=1}^{n-1} v_i \varphi_i(x) \right\rangle \\ \sum_{i=1}^{n-1} v_i \mathcal{A}\left(u^h, \varphi_i\right) &= \sum_{i=1}^{n-1} v_i \left\langle f, \varphi_i \right\rangle \\ \sum_{i=1}^{n-1} v_i \left[\mathcal{A}\left(u^h, \varphi_i\right) - \left\langle f, \varphi_i \right\rangle\right] &= 0 \end{aligned}$$

entonces $\mathcal{A}\left(u^h, \varphi_i\right) = \langle f, \varphi_i \rangle$ ya que v^h es arbitrario

buscamos $u^h = \Psi(x) + \sum_{i=1}^{n-1} u_j \varphi_j(x)$ donde u_j son los coeficientes

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \mathcal{A}\left(\Psi(x) + \sum_{i=1}^{n-1} u_j \varphi_j, \varphi_i\right) &= \langle f, \varphi_i \rangle \quad i = 1, \ldots, n-1 \\
\mathcal{A}(\Psi, \varphi_i) + \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n-1} u_j \varphi_j, \varphi_i\right) &= \langle f, \varphi_i \rangle \\
\sum_{i=1}^{n-1} u_j\, \mathcal{A}\left(\varphi_j + \varphi_i\right) &= \langle f, \varphi_i \rangle
\end{aligned}$$

extendiendo $\langle f, \varphi_1 \rangle - \mathcal{A}(\Psi, \varphi_1)$

$$\begin{aligned}
\langle f, \varphi_1 \rangle - \mathcal{A}(\Psi, \varphi_1) &= \mathcal{A}\left(\varphi_1, \varphi_1\right) u_1 + \mathcal{A}\left(\varphi_2, \varphi_1\right) u_2 + \ldots + \mathcal{A}\left(\varphi_{n-1}, \varphi_1\right) u_{n-1} \\
&\vdots \\
\left\langle f, \varphi_{n-1} \right\rangle - \mathcal{A}(\Psi, \varphi_{n-1}) &= \mathcal{A}\left(\varphi_1, \varphi_{n-1}\right) u_1 + \mathcal{A}\left(\varphi_2, \varphi_{n-1}\right) u_2 + \ldots + \mathcal{A}\left(\varphi_{n-1}, \varphi_{n-1}\right) u_{n-1}
\end{aligned}$$

asi obtenemos un sistema lineal de $n-1$ ecuaciones con $n-1$ incognitas $Mu = b$

$$M = \begin{bmatrix} \mathcal{A}(\varphi_1, \varphi_1) & \ldots & \mathcal{A}(\varphi_{n-1}, \varphi_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{A}(\varphi_1, \varphi_{n-1}) & \ldots & \mathcal{A}(\varphi_{n-1}, \varphi_{n-1}) \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \langle f, \varphi_1 \rangle - \mathcal{A}(\Psi, \varphi_i) \\ \vdots \\ \left\langle f, \varphi_{n-1} \right\rangle - \mathcal{A}(\Psi, \varphi_{n-1}) \end{bmatrix}$$

como $\mathcal{A}(\cdot,\cdot)$ es simétrico, entonces $\mathcal{A}(\varphi_i, \varphi_j) = \mathcal{A}(\varphi_j, \varphi_i) \Longrightarrow M$ es simétrica
además M es definida positiva

$$(v_1, \ldots, v_n) M \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} > 0$$

$$\begin{aligned}
v^T M v &= v^T \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n-1} v_j \mathcal{A}(\varphi_j, \varphi_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n-1} v_i \mathcal{A}(\varphi_j, \varphi_{n-1}) \end{bmatrix} \\
&= v^T \begin{bmatrix} \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n-1} v_j \varphi_j, \varphi_1\right) \\ \vdots \\ \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n-1} v_j \varphi_j, \varphi_{n-1}\right) \end{bmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} v_i \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{n-1} v_j \varphi_j, \varphi_i\right) \\
&= \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{n-1} v_j \varphi_j\, ,\, \sum_{i=1}^{n-1} v_i \varphi_i\right) \\
&= \mathcal{A}\left(v^h, v^h\right) \\
&= \int_a^b \left[p(x)\left(v^{'h}\right)^2 + r(x)\left(v^h\right)^2\right] dx > 0
\end{aligned}$$

M es definida positiva $\Longrightarrow$ M^{-1} existe
el sistema tiene una única solución

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \mathcal{A}(\varphi_i, \varphi_j) \\ &= \int_a^b \left[p(x)\varphi_i'\varphi_j' + r(x)\varphi_i\varphi_j\right] dx \\ b_i &= \int_a^b f\,\varphi_i\,dx - \int_a^b \left[p(x)\Psi'(x)\varphi_i + r(x)\Psi\varphi_i\right] dx \qquad \square \end{aligned}$$

Funciones Base Lineales en Una Dimensión

Se efectua la partición de mallado de la región, un elemento con nodos en x_{i-1} y x_i
en general los elementos pueden ser de diferente tamaño $x_i - x_{i-1} = h_i \quad i = 1, \ldots, n-1$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h_i} & x_{i-1} < x < x_i \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} & x_i < x < x_{i+1} \\ 0 & \text{en cualquier parte} \end{cases}$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{h_1} & x_0 < x < x_1 \\ 0 & x > x_1 \end{cases}$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{h_1} & x_0 < x < x_1 \\ \dfrac{x_2 - x}{h_2} & x_1 < x < x_2 \\ 0 & x > x_2 \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0 & x_0 < x < x_1 \\ \dfrac{x - x_1}{h_2} & x_1 < x < x_2 \\ \dfrac{x_3 - x}{h_3} & x_2 < x < x_3 \\ 0 & x > x_3 \end{cases}$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 0 & x_0 < x < x_{n-1} \\ \dfrac{x - x_1}{h_n} & x_{n-1} < x < x_n \end{cases}$$

observemos que $\Psi(x) = A\varphi_0(x) + B\varphi_n(x)$ donde $\Psi(x) \in H_E'(a, b)$, cuando hacemos la combinación lineal $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\varphi_i(x)$ obtenemos una función lineal continua

$$\varphi_i(x)\varphi_j(x) = \begin{cases} 0 & |i - j| \geqslant 2 \\ \neq 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo

$$\begin{cases} -u'' + u = \left(1 + \pi^2\right) \sin \pi x & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 & u(1) = 0 \end{cases}$$

$p(x) = 1 \qquad r(x) = 1$
$Mu = b$

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \mathcal{A}(\varphi_j, \varphi_i) \\ &= \int_0^1 [\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)]\,dx \\ b_i &= \int_0^1 \left(1+\pi^2\right)\sin\,\pi x\varphi_i(x)\,dx - \int_0^1 [\Psi'\varphi_i + \Psi\varphi_i]\,dx \\ &= \int_0^1 \left(1+\pi^2\right)\int_0^1 \sin\,\pi x\varphi_i(x)\,dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi &= A\varphi_0(x) + B\varphi_n(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

M es tridiagonal
dos elementos

$$\begin{aligned} u^h &= \sum_{i=0}^{2} u_i\varphi_i(x) \\ M_{11}u_1 &= b_1 \\ &= u_1\varphi_1(x) \\ b_1 &= \int_0^1 \left(1+\pi^2\right)\int_0^1 \varphi_1(x)\,\sin\,\pi x\,dx \\ u_1 &= \frac{b_1}{M_1} \\ \varphi_1(x) &= \begin{cases} \dfrac{x-0}{\frac{1}{2}} & 0 < x < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1-x}{\frac{1}{2}} & \dfrac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \\ M_{11} &= \int_0^1 \left(4+4x^2\right)\,dx + \int_{1/2}^1 2(1-x)\,\sin\,\pi x\,dx \\ &= \frac{13}{3} \\ b_1 &= \left(1+\pi^2\right)\left[\int_0^{1/2} 2x\,\sin\,\pi x\,dx + \int_{1/2}^1 (2(1-x)\,\sin\,\pi x\,dx\right] \\ &= \frac{4}{\pi^2} + 4 \\ u_1 &= \frac{\frac{4}{\pi^2}+4}{\frac{13}{3}} \\ &\approx 1.016 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= [\mathcal{A}(\varphi_1, \varphi_1)] \\ &= \int_0^1 \left[(\varphi_1')^2 + \varphi_1^2\right]\,dx \\ M_{11}u_1 &= b_1 \\ \varphi_1'(x) &= \begin{cases} 2 & 0 < x < \dfrac{1}{2} \\ -2 & \dfrac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

6 elementos
$u^h = \sum_{i=1}^{n-1} u_i\varphi_i(x)$ ya que $A = B = 0$

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & 0 & 0 \\ 0 & M_{32} & M_{33} & M_{34} & 0 \\ 0 & 0 & M_{43} & M_{44} & M_{45} \\ 0 & 0 & 0 & M_{54} & M_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$

Funciones Base Cuadráticas

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} & x_0 \leqslant x \leqslant x_2 \\ 0 & x \geqslant x_2 \end{cases}$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} & x_0 \leqslant x \leqslant x_2 \\ 0 & x \geqslant x_2 \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} & x_0 \leqslant x \leqslant x_2 \\ \dfrac{(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_3)(x_2-x_4)} & x_2 \leqslant x \leqslant x_4 \\ 0 & x \geqslant x_4 \end{cases}$$

$$\varphi_3(x) = \begin{cases} 0 & x_0 \leqslant x \leqslant x_2 \\ \dfrac{(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_2)(x_3-x_4)} & x_2 \leqslant x \leqslant x_4 \\ 0 & x \geqslant x_4 \end{cases}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & x_0 \leqslant x \leqslant x_{n-2} \\ \dfrac{(x-x_{n-2})(x-x_{n-1})}{(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1})} & x_0 \leqslant x \leqslant x_2 \end{cases}$$

Funciones Base Cúbicas

Insertamos dos nodos en cada elemento
no cambia la forma de la aproximación

$$u^h(x) = \sum_{i=0}^{n} u_i\varphi_i(x) \qquad Mu = b \qquad M_{ij} = \int_a^b [p(x)\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + r(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)]\, dx$$

la mejor estrategia es efectuar integración numérica, la más utilizada es la cuadrática gaussiana

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x)\, dx &= \int_{-1}^{1} G(z)\, dz \\ &\approx \sum_{i=1}^{m} w_i G(z_i) \end{aligned}$$

Ejemplo

Cuadráticas, dos elementos
como $u(0) = u(1) = 0$ entonces no nos interesan φ_0, φ_4

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \begin{cases} \dfrac{(x-0)(x-\frac{1}{2})}{(\frac{1}{4}-0)(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})} & 0 \leqslant x < \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \leqslant x < 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -16x(x-\frac{1}{2}) \\ 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x-\frac{1}{4})}{(\frac{1}{2}-0)(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})} & 0 \leqslant x < \frac{1}{2} \\ \dfrac{(\frac{1}{2}-\frac{3}{4})(\frac{1}{2}-1)}{(\frac{1}{4}-0)(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})} & \frac{1}{2} \leqslant x < 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 8x(x-\frac{1}{4}) \\ 8x(x-\frac{3}{4})(x-1) \end{cases}$$
$$\varphi_3(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant x < \frac{1}{2} \\ \dfrac{(x-\frac{1}{2})(x-1)}{(\frac{3}{4}-\frac{1}{2})(\frac{3}{4}-1)} & \frac{1}{2} \leqslant x < 1 \end{cases}$$

Consideremos un problema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden con condiciones de frontera más generales

$$\begin{cases} a_2(x)\dfrac{d^2u}{dx^2} + a_1\dfrac{du}{dx} + a_0(x)u = f(x) \quad 0 < x < l \\ \alpha_0\dfrac{du(0)}{dx} + \beta_0 u(0) = \gamma_0 \\ \alpha_1\dfrac{du(l)}{dx} + \beta_0 u(l) = \gamma_l \end{cases}$$

$\alpha_0, \beta_0, \alpha_l, \beta_l, \gamma_0, \gamma_l$ son constantes

Determinar la formulación débil del problema

$$\int_0^l \left[a_2(x)\frac{d^2u}{dx^2}v + a_1\frac{du}{dx}v + a_0(x)uv \right] dx = \int_0^l f(x)v\,dx$$

integrando por partes $\displaystyle\int_0^l a_2(x)\frac{d^2u}{dx^2}v(x)\,dx$

$$w = a_2(x)v(x) \qquad z = \frac{du}{dx}$$
$$dw = [a_2'(x)v(x) + a_2(x)v'(x)]\,dx \qquad dz = \frac{d^2u}{dx^2}dx$$

sustituyendo

$$\int_0^l a_2(x)\frac{d^2u}{dx^2}v\,dx = a_2(x)v(x)\frac{du}{dx}\bigg|_0^l - \int_0^l [a_2'(x)v(x) + a_2(x)v'(x)]\,\frac{du}{dx}$$

sustituyendo

$$a_2vu'\bigg|_0^l - \int_0^l (a_2'v + a_2v')u\,dx + \int_0^l a_1u'v\,dx + \int_0^l a_0uv\,dx = \int_0^l fv\,dx$$
$$\int_0^l [a_2'u'v' + (a_1 - a_2')u'v + a_0uv]\,dx + a_2vu'\bigg|_0^l = \int_0^l fv\,dx \qquad u, v \in H'(0,l)$$

lo cual es la formulación débil, observemos que

$$a_2vu'\bigg|_0^l = a_2(l)v(l)u'(l) - a_2(0)v(0)u'(0)$$

buscamos determinar $u; u(0), v(l)$ son también desconocidas, de las condiciones de frontera

$$u'(0) = \frac{\gamma_0 - \beta_0 u(0)}{\alpha_0}$$
$$u'(l) = \frac{\gamma_l - \beta_l u(l)}{\alpha_l}$$

entonces

$$a_2v'u\bigg|_0^l = a_2(l)v(l)\left[\frac{\gamma_l}{\alpha_l} - \frac{\beta_l}{\alpha_l}u(l)\right] - a_2(0)v(0)\left[\frac{\gamma_0}{\alpha_0} - \frac{\beta_0}{\alpha_0}u(0)\right]$$

entonces la formulación débil es

$$\int_0^l [-a_2 u'v' + (a_1 - a_2')u'v + a_0 uv]\,dx + \frac{a_2(0)\gamma_0}{\alpha_0}u(0)v(0) - \frac{a_2(l)\gamma_l}{\alpha_l}u(l)v(l) = \int_0^l f(x)v\,dx + \frac{a_2(0)\gamma_0}{\alpha_0}v(0) - \frac{a_2(l)\gamma_l}{\alpha_l}v(l)$$

$$u^h = \sum_{j=1}^N u_j\varphi_j(x) \qquad v^h = \sum_{j=1}^N v_i\varphi_i(x)$$

$u^h, v^h \in S^h \subset H'(0,l)$, sustituyendo

$$\int_0^l [-a_2\varphi_i'\varphi_j' + (a_1 - a_2')\varphi_j\varphi_i + a_0\varphi_i\varphi_j]\,dx + \frac{a_2(0)}{\alpha_0}\varphi_i(0)\varphi_j(0) - \frac{a_2(l)}{\beta_l}\varphi_i(l)\varphi_j(l) =$$
$$\int_0^l f\varphi_j\,dx + \frac{a_2(0)}{\alpha_0}\gamma_0\varphi_i(0) - \frac{a_2(l)}{\alpha_l}\varphi_i(l) \quad i = 1,\dots,N \quad j = 1,\dots,N$$

$Mu = b$

$$M_{ij} = \overbrace{\int_0^l [-a_2\varphi_i'\varphi_j' + (a_1 - a_2')\varphi_j\varphi_i + a_0\varphi_i\varphi_j]\,dx}^{K_{ij}} + \frac{a_2(0)}{\alpha_0}\varphi_i(0)\varphi_j(0) - \frac{a_2(l)}{\alpha_l}\varphi_i(l)\varphi_j(l)$$
$$b = \underbrace{\int_0^l f\varphi_i dx}_{b_i} + \frac{a_2(0)}{\alpha_0}\gamma_0\varphi_i(0) - \frac{a_2(l)}{\alpha_l}\varphi_i(l)$$

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1N} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{(N-1)1} & M_{(N-1)2} & \dots & M_{(N-1)N} \\ M_{N1} & M_{N2} & \dots & M_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{N-1} \\ b_N \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} K_{11} + \frac{a_2(0)\beta_0}{\alpha_0} & K_{12} & \dots & \dots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & \dots & K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K_{(N-1)1} & K_{(N-1)2} & \dots & \dots & K_{(N-1)N} \\ K_{N1} & K_{N2} & \dots & K_{N(N-1)} & K_{NN} - \frac{a_2(l)\beta_l}{\alpha_l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 + \frac{a_2(0)\gamma_0}{\alpha_0} \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_{N-1} \\ \bar{b}_N - \frac{a_2(l)\gamma_l}{\alpha_l} \end{bmatrix}$$

Problemas Físicos Asociados a la Ecuación Diferencial Ordinaria de Segundo Orden

Las ecuaciones constitutivas se determinan generalmente en base a los experimentos, son modelos matemáticos

Flujo $\sigma = -k\dfrac{du}{dx}$ donde u es la variable de estado, y k el módulo del material

aplicando la ley de conservación del flujo

$$\frac{d\sigma}{dx} = f$$
$$\frac{d}{dx}\left(-k\frac{du}{dx}\right) = f(x)$$

El modelo se completa considerando fuentes internas que se asumen de la forma $a_0 u$ y otras formas de transferencia como la convección $a_1\dfrac{du}{dx}$

conducción

convección, se mueve a una velocidad a_1

entonces $-\dfrac{d}{dx}\left(k\dfrac{du}{dx}\right) + a_1\dfrac{du}{dx} + a_0 u = f$

Principio de Conservación

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{dx} &= f(x) \quad \text{en}\, a < x < b \\
\sigma(b) - \sigma(a) &= \int_a^b f\, dx
\end{aligned}
$$

se define el salto en el flujo en un punto $z \in [a, b]$

$$
[\![\sigma(z)]\!] = \lim_{b \to z^+} \sigma(b) - \lim_{a \to z^-} \sigma(a)
$$

es claro que si $f(x)$ es continua $\Longrightarrow [\![\sigma(z)]\!] = 0$

Ejemplo

Determinar la formulación débil del siguiente problema

$$
\begin{cases}
-\dfrac{d}{dx}\left[k(x)\dfrac{du}{dx}\right] + c(x)\dfrac{du}{dx} + b(x)u(x) = f(x) & x \in \Omega_i \quad i = 1, 2, 3, 4 \\
\left[\!\!\left[k(x)\dfrac{du}{dx}\right]\!\!\right] = 0 & \text{en}\, x = x_1 \\
-\left[\!\!\left[k(x)\dfrac{du}{dx}\right]\!\!\right] = \hat{f} & \text{en}\, x = x_2 \\
\left[\!\!\left[k(x)\dfrac{du}{dx}\right]\!\!\right] = 0 & \text{en}\, x = x_3 \\
\alpha_0 \dfrac{du(0)}{dx} + \beta_0 u(0) = \gamma_0 \\
\alpha_l \dfrac{du(l)}{dx} + \beta_l u(l) = \gamma_l
\end{cases}
$$

$K'(x)$ no existe en x_1

$$
\begin{aligned}
\sigma(b) - \sigma(a) &= \int_a^b f(x)\, dx \\
&= \int_a^b \bar{f}(x)\, dx + \int_a^b \hat{f}(x)\, \delta(x - x_2)\, dx
\end{aligned}
$$

Determinar una solución clásica en encontrar $u(x)$ que satisfaga la ecuación diferencial, las condiciones de frontera y las tres condiciones en el salto en el flujo. Veamos la formulación débil del problema

$$
\int_0^l \left[-\frac{d}{x}\left(k\frac{du}{dx}\right) + c(x)\frac{du}{dx} + b(x)u(x)\right] v(x)\, dx = \int_0^l f(x)v(x)\, dx
$$

integrando por partes

$$
\begin{aligned}
w &= v(x) & dz &= -\frac{d}{x}\left(k\frac{du}{dx}\right) \\
w' &= v'(x)\, dx & z &= -k\frac{du}{dx}
\end{aligned}
$$

$$
\int_{x_i}^{x_{i+1}} -\frac{d}{x}\left(k\frac{du}{dx}\right) v(x)\, dx = -kvu'\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} ku'v'\, dx
$$

$$
\Longrightarrow \sum_{i=0}^{3}\left(-ku'v|_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} ku'v'\, dx\right) + \sum_{i=0}^{3}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (ku'v' + cu'v + buv)\, dx = \sum_{i=0}^{3}\int_{x_i}^{x_{i+1}} fv\, dx
$$

$$
\sum_{i=0}^{3}\left(-ku'v|_{x_i}^{x_{i+1}}\right) + \sum_{i=0}^{3}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (ku'v' + cu'v + buv)\, dx = \sum_{i=0}^{3}\int_{x_i}^{x_{i+1}} fv\, dx
$$

$$\underbrace{-k_1 u'(x_1^-)}_{\sigma(x_1)} v(x_1^-) - (-k_1 u'(0)v(0)) - k_2 u'(x_2^-)v'(x_2^-) - \left(-k_2 u'(x_1^+)v(x_1^+)\right)$$
$$-k_2 u'(x_3^-)v(x_3^- - \left(-k_2 u'(x_2^+)v'(x_2^+)\right) - k_2 u'(l)v(l) - \left(-k_2 u'(x_3^+)v(x_3^+)\right)$$
$$+\sum_{i=0}^{3}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (ku'v' + cu'v + buv)\,dx = \sum_{i=0}^{3}\int_{x_i}^{x_{i+1}} fv\,dx$$

$$\Longrightarrow -(-k_1 u'(0)v'(0)) - [\![\underbrace{-ku'(x_1)}_{0}]\!]v(x_1) - [\![\underbrace{-ku'(x_2)}_{\hat{f}}]\!]v(x_2) - [\![\underbrace{-ku'(x_3)}_{0}]\!]v(x_3)_0 - k_2 u'(l)v(l) = \int_0^l \bar{f}v\,dx$$

$$u'(0) = \frac{\gamma_0 - \beta_0 u(0)}{\alpha_0} \qquad u'(0) = \frac{\gamma_l - \beta_l u(l)}{\alpha_l}$$

entonces

$$k_1 \frac{\gamma_0 - \beta_0 u(0)}{\alpha_0} v(0) - \hat{f}v(x_2) - k_1 \frac{\gamma_l - \beta_l u(l)}{\alpha_l} v(l) + \int_0^l (ku'v' + cu'vuv)\,dx = \int_0^l \bar{f}v\,dx$$

entonces la formulación débil del problema es

$$\int_0^l (ku'v' + cu'vuv)\,dx - \frac{k_1\beta_0}{\alpha_0}u(0)v(0) - \frac{k_2\beta_l}{\alpha_l}u(l)v(l) = \int_0^l \bar{f}v\,dx + \hat{f}v(x_2) + \frac{k_1\gamma_0}{\alpha_0}v(0) - \frac{k_2\gamma_l}{\alpha_l}v(l)$$

$$u, v \in H'(0,l) \qquad u^h \in S^h \subset H' \qquad u^h = \sum_{i=1}^{N} u_i\varphi_i \qquad v^h = \sum_{i=1}^{N} u_j\varphi_j$$

Análisis de Error (A Priori)

Lema de Cea

Supongamos que u es la función que minimiza $\mathcal{J}(u)$ en $H'_E(a <, b)$ o equivalentemente que u satisface el principio de *Galerkin*, y que u^h es su aproximación de *Galerkin* obtenida minimizando $\mathcal{J}(\cdot)$ en S_E^h o $\mathcal{A}\left(u^h, v^h\right) = \left\langle f, v^h\right\rangle \quad \forall v^h \in S_0^h$ entonces

$$\mathcal{A}\left(u - u^h, v^h\right) = 0 \quad \forall v^h \in S_0^h$$
$$\mathcal{A}\left(u - u^h, u - u^h\right) = \min_{v^h \in S_E^h} \mathcal{A}\left(u - v^h, u - v^h\right)$$

Error=$|u - u^h|$

$\mathcal{A}(\cdot,\cdot)$ define un producto interior en $H'_0(a, b)$

$$\mathcal{A}(u, v) = \int_a^b [p(x)u'v' + r(x)uv]\,dx$$

entonces $\mathcal{A}\left(u - u^h, v^h\right) = 0$ significa que $u - u^h$ es ortogonal respecto al subespacio S_0^h, por eso a la ecuación (9) se le conoce como principio de ortogonalidad de *Galerkin*

Interpretación Gráfica

$H'_E(a, b) \qquad S_0^h \subset H'_E \qquad u \in H'_E \qquad \Psi \in H'_E \qquad u^h \in S_E^h$

Proyector de Ritz

Sea $\Psi(x) = A\varphi_0(x) + B\varphi_n(x)$

$$\begin{aligned} R^h : H'_0(a,b) &\longrightarrow S^h_0 \\ u - \Psi &\longrightarrow u^h - \Psi \end{aligned}$$

Demostración
Por el principio de *Galerkin* $\mathcal{A}(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \forall\, v \in H'_0$
en particular $\mathcal{A}\left(u, v^h\right) = \left\langle f, v^h\right\rangle \quad \forall\, v^h \in S^h_0 \subset H'_0$
por el método de *Galerkin* $\mathcal{A}\left(u^h, v^h\right) = \left\langle f, v^h\right\rangle \quad \forall\, v^h \in S^h_0$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \mathcal{A}\left(u^h, v^h\right) - \mathcal{A}\left(u^h, v^h\right) = \left\langle f, v^h\right\rangle = 0 \quad \forall\, v^h \in S^h_0 \\ &\Longrightarrow \mathcal{A}\left(u - u^h, v^h\right) = 0 \quad \forall v^h \in S^h_0 \end{aligned}$$

tomemos $v^h \in S^h_E$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\left(u - v^h, u - v^h\right) &= \mathcal{A}\left(u - u^h + u^h - v^h, u - u^h + u^h - v^h\right) \\ &= \mathcal{A}\left(u - u^h, u - u^h\right) + \mathcal{A}\left(u - u^h, u^h - v^h\right) + \mathcal{A}\left(u^h - v^h, u - u^h\right) \\ &\quad + \mathcal{A}\left(u^h - v^h, u^h - v^h\right) \\ &= \mathcal{A}\left(u - u^h, u - u^h\right) + 2\mathcal{A}\left(u - u^h, u^h - v^h\right) + \mathcal{A}\left(u^h - v^h, u^h - v^h\right) \end{aligned}$$

por la simetría de $\mathcal{A}$, como

$$\begin{aligned} u^h - v^h \in S^h_0 &\Longrightarrow \mathcal{A}\left(u - u^h, u^h - v^h\right) = 0 \text{ por principio de ortogonalidad de } \textit{Galerkin} \\ &\Longrightarrow \mathcal{A}\left(u - v^h, u - v^h\right) = \mathcal{A}\left(u - u^h, u - u^h\right) + \mathcal{A}\left(u^h - v^h, u^h - v^h\right) \end{aligned}$$

como $\mathcal{A}\left(u^h - v^h, u^h - v^h\right) \geqslant 0$
entonces $\mathcal{A}\left(u - u^h, u - u^h\right) \leqslant \mathcal{A}\left(u - v^h, u - v^h\right) \quad \forall\, v^h \in S^h_E$, por lo tanto (10)
se define la norma energía $\|\cdot\|_A$ en $H'_0(a,b)$, asi

$$\begin{aligned} \|v\|_A &= \left[\mathcal{A}(v,v)^{1/2}\right] \\ &= \left\{\int_a^b \left[p(x)(v')^2 + r(x)(v)^2\right] dx\right\}^{1/2} \end{aligned}$$

(10) prueba que u^h es la mejor aproximación de S^h_E a la solución débil $u \in H'_E(a,b)$ cuando medimos el error de la aproximación en la norma energía

$$\left\|u - u^h\right\|_A = \min_{v^h \in S^h_E} \left\|u - v^h\right\|_A$$

ahora una pregunta muy importante es como el error $u - u^h$ depende del tamaño de la subdivisión h en $[a,b]$
para analizar esto necesitamos introducir el interpolante del elemento finito $I^h u \in S^h_E$
($I^h u$ es interpolante de $u \in H'_E(a,b)$)

$$I^h u(x) = \Psi(x) + \sum_{i=1}^{n-1} u(x_i)\varphi_i(x) \quad x \in [a,b]$$

por ser interpolante

$$\begin{aligned} I^h u(x_j) &= u(x_j) \\ &= u_j \end{aligned}$$

tomando $v^h = I^h u \in S^h_E$, entonces $\left\|u - u^h\right\|_A \leqslant \left\|u - I^h u\right\|_A \qquad \square$

Teorema 14.7

Supongamos que $u \in H^2(a,b) \cap H'_E(a,b)$, y sea $I^h u$ el interpolante del elemento finito en S^h_E, entonces tenemos las siguientes cotas de error

$$\begin{aligned}
\left\| u - I^h u \right\|_{L^2(x_{i-1},x_i)} &\leqslant \left(\frac{h_i}{\pi}\right)^2 \|u''\|_{L^2(x_{i-1},x_i)} \qquad i = 1,2,\ldots,n \quad h_i = x_i - x_{i-1} \\
\left\| u' - \left(I^h u\right)' \right\|_{L^2(x_{i-1},x_i)} &\leqslant \frac{h_i}{\pi} \|u''\|_{L^2(x_{i-1},x_i)}
\end{aligned}$$

Demostración

Consideremos el elemento $[x_{i-1}, x_i] \quad i = 1,\ldots,n$

definimos $\zeta(x) = u(x) - I^h u(x) \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$

entonces $\zeta(x) \in H^2(x_{i-1}, x_i)$ con $\zeta(x_{i-1}) = \zeta(x_i) = 0$

aplicando resultados de convergencia en series de *Fourier*, estamos seguros que $\zeta(x)$ puede expandirse en series de *Fourier* de la forma

$$\begin{aligned}
\zeta(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin \frac{k\pi(x_i - x_{i-1})}{h_i} \qquad x \in [x_{i-1}, x_i] \\
\Longrightarrow \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\zeta(x)|^2 dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin \frac{k\pi(x - x_{i-1})}{h_i} \cdot \sum_{l=1}^{+\infty} a_l \sin \frac{l\pi(x - x_{i-1})}{h_i}\, dx \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=1}^{+\infty} a_k a_l \sin \frac{k\pi(x - x_{i-1})}{h_i} \sin \frac{l\pi(x - x_{i-1})}{h_i}\, dx \\
&= \sum_{k,l=1}^{+\infty} a_k a_l \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin \frac{k\pi(x - x_{i-1})}{h_i} \sin \frac{l\pi(x - x_{i-1})}{h_i}\, dx
\end{aligned}$$

tomando $t = \dfrac{x - x_{i-1}}{h_i} \qquad h_i\, dt = dx \quad t = 0 \longrightarrow t = 1$

$$\begin{aligned}
&= h_i \sum_{k,l=1}^{+\infty} a_k a_l \int_0^l \sin k\pi t \sin l\pi t\, dt \\
&= \frac{h_i}{2} \sum_{k,l=1}^{+\infty} a_k a_l \delta_{lk} \\
&= \frac{h_i}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2
\end{aligned}$$

con la delta de *Kronecker* $\delta_{kl} = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 1 & k = l \end{cases}$ de la misma forma

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\zeta'(x)|^2 dx &= \frac{h_i}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{k\pi}{h_i}\right)^2 |a_k|^2 \\
\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\zeta''(x)|^2 dx &= \frac{h_i}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{k\pi}{h_i}\right)^4 |a_k|^2
\end{aligned}$$

ya que

$$\zeta'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \frac{k\pi}{h_i} \cos \frac{k\pi(x - x_{i-1})}{h_i}$$

donde $a_k \dfrac{k\pi}{h_i}$ es un nuevo coeficiente

$$\zeta''(x) = -\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \left(\frac{k\pi}{h_i}\right)^2 \sin \frac{k\pi(x - x_{i-1})}{h_i}$$

y entonces

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\zeta(x)|^2 dx &= \frac{h_i}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2 \\
&= \frac{h_i}{2}\frac{h_i^4}{h_i^4}\frac{\pi^4}{h_i^4}\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2 \\
&\leqslant \frac{h_i}{2}\frac{h_i^4}{h_i^4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\pi^4}{h_i^4}k^4|a_k|^2 \qquad k^4 \geqslant 1 \\
&= \left(\frac{h_i}{\pi}\right)^4 \int_{x_{i-1}}^{x_i} |\zeta''(x)|^2 dx
\end{aligned}$$

$\zeta(x) = u - I^h u$
Si $I^h u$ es polinómica de primer grado $\Longrightarrow \zeta''(x) = u''(x)$, entonces se obtienen las cotas de error del teorema

$$\begin{aligned}
\int_{x_{i-1}}^{x_i} |\zeta(x)|^2 dx = \|\zeta(x)\|^2_{L^2(x_{i-1},x_i)} &\Longrightarrow \|\zeta(x)\|_{L^2(x_{i-1},x_i)} \leqslant \left(\frac{h_i}{\pi}\right)^4 \|\zeta''(x)\|_{L^2(x_{i-1},x_i)} \\
&\Longrightarrow \|\underbrace{\zeta(x)}_{u-I^h u}\|^2_{L^2(x_{i-1},x_i)} \leqslant \left(\frac{h_i}{\pi}\right)^2 \|u''(x)\|_{L^2(x_{i-1},x_i)}
\end{aligned}$$

además si $I^h u$ es interpolante de segundo grado $\zeta'''(x) = u'''(x)$ entonces

$$\left\|u - I^h u\right\|_{L^2(x_{i-1},x_i)} \leqslant \left(\frac{h_i}{\pi}\right)^3 \|u'''(x)\|_{L^2(x_{i-1},x_i)}$$

pero ahora se necesita que $u \in H^3(a,b) \cap H'_E(a,b)$

$$\int_0^l \sin k\pi t \, \sin l\pi t \, dt = \int_0^l \cos k\pi t \, \cos l\pi t \, dt$$

se puede entonces generalizar: si $I^h u$ es un interpolante polinómico de grado m, entonces

$$\left\|u - I^h u\right\|_{L^2(x_{i-1},x_i)} \leqslant \left(\frac{h_i}{\pi}\right)^{m+1} \left\|u^{(m+1)}(x)\right\|_{L^2(x_{i-1},x_i)}$$

con $u \in H^{m+1}(a,b) \cap H'_E(a,b)$, si

$$c = \frac{1}{\pi^{m+1}} \max_{x\in(x_{i-1},x_i)} \left\|u^{(m+1)}(x)\right\|_{L^2(x_{i-1},x_i)}$$

entonces $\left\|u - u^h\right\|_{L^2(x_{i-1},x_i)} \leqslant ch_i^{m+1} \quad m$ de grado $I^h u$
en la norma energía $\|\cdot\|_A$ se puede probar que

$$\left\|u - u^h\right\|_{A(x_{i-1},x_i)} \leqslant kh_i^m \quad m \,\text{de grado}\, I^h u$$

$$e_i = \left\|u - u^h\right\|_{(x_{i-1},x_i)}$$

tomamos $h = \max\{h_i\}$

$$\begin{aligned}
\left\|u - u^h\right\|_{L^2(a,b)} &\leqslant kh^{m+1} \\
\left\|u - u^h\right\|_{A(a,b)} &\leqslant kh^m \\
\ln\left\|u - u^h\right\|_{L^2(a,b)} &\leqslant (m+1)\ln h + \ln c \qquad \square
\end{aligned}$$

en un punto x_i

Corolario 14.1

Supongamos que $u \in H^2(a,b) \cap H'_E(a,b)$, entonces

$$\left\| u - I^h u \right\|_A^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\frac{h_i}{\pi}\right)^2 P_i + \left(\frac{h_i}{\pi}\right)^4 R_i \right\} \|u''\|^2_{L^2(x_{i-1},x_i)}$$

donde $P_i = \max\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} p(x)$ y $R_i = \max\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} r(x)$

Corolario 14.2

Supongamos que $u \in H^2(a,b) \cap H'_E(a,b)$, entonces

$$\left\| u - I^h u \right\|_A \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\frac{h_i}{\pi}\right)^2 P_i + \left(\frac{h_i}{\pi}\right)^4 R_i \right\} \|u''\|^2_{L^2(x_{i-1},x_i)}$$

donde $P_i = \max\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} p(x)$ y $R_i = \max\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} r(x)$, y además

$$\left\| u - I^h u \right\|_A \leqslant \frac{h_i}{\pi} \left\{ P + \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 R \right\}^{1/2} \|u''\|_{L^2(a,b)}$$

$$P = \max_{x\in[a,b]} p(x) \qquad R = \max_{x\in[a,b]} r(x) \qquad h = \max_{1\leqslant i\leqslant n} h_i$$

Análisis de Error (A Posteriori)

Consideremos el problema de valor de frontera

$$\begin{cases} -(p(x)u')' + q(x)u' + r(x)u = f(x) & a < x < b \\ u(a) = A & u(b) = B \\ p, q \in C'(a,b) \quad f \in L^2(a,b) & p(x) \geqslant c_0 > 0 \\ r(x) - \dfrac{1}{2}q'(x) \leqslant c_1 > 0 \,\text{en}\, [a,b] & \end{cases}$$

entonces $\mathcal{A}(w,v) = \displaystyle\int_a^b [p(x)w'v' + q(x)w'v + rwv]\,dx$
la formulación débil consiste en determinar $u \in H'(a,b)$ tal que $\mathcal{A}(u,v) = \langle f, v\rangle \quad \forall\, v \in H'_0(a,b)$
el objetivo es cuantificar $\left\| u - I^h u \right\|_{L^2(a,b)}$ en terminos de parámetros de la malla h, y de la aproximación u^h en lugar de hacerlo en terminos de u
para hacer este análisis de error se considera el problema auxiliar

$$\begin{cases} -(p(x)z')' + (q(x)z)' + r(x)z = \left(u - u^h\right)(x) & a < x < b \\ z(a) = 0 & z(b) = 0 \end{cases}$$

este es llamado el problema dual o adjunto, se encuentra que

$$\left\| u - u^h \right\|_{L^2(a,b)} \leqslant \frac{1}{\pi^2} \left(\sum_{i=1}^{n} h_i^4 \left\| R\left(u^h\right) \right\|_{L^2(x_{i-1},x_i)} \right)^{1/2} \|z''\|_{L^2(0,1)}$$

con $R\left(u^h\right)(x) = f(x) - \left[-\left(p(x) \left(u^h\right)' \right)' + q(x) \left(u^h\right)' + r(x)u^h \right]$ que es el residuo del elemento finito

Lema 14.1

Supongamos que z es la solución débil del problema dual (14.33), (14.34), entonces existe una constante positiva k dependiendo de p, q, r solamente tal que

$$\|z''\|_{L^2(a,b)} \leqslant k \left\|u - u^h\right\|_{L^2(a,b)}$$

con $k = \dfrac{1}{c_0}\left[1 + \dfrac{1}{\min\{c_0, c_1\}}\left(\|p' + q\|_\infty^2 + \|r - q'\|_\infty^2\right)^{1/2}\right]$
con estos resultados obtenemos cota de error que se pueden calcular después de obtener la aproximación

$$\left\|u - u^h\right\|_{L^2(a,b)} \leqslant k_0 \left(\sum_{i=1}^{n} h_i^4 \left\|R\left(u^h\right)\right\|_{L^2(x_{i-1},x_i)}\right)^{1/2} \qquad k_0 = \frac{k}{\pi^2}$$

este resultado (14.43) nos permite definir criterios de paro

$$\left\|u - u^h\right\|_{L^2(a,b)} \leqslant \text{Tol}$$

$$k_0 \left(\sum_{i=1}^{n} h_i^4 \left\|R\left(u^h\right)\right\|_{L^2(x_{i-1},x_i)}\right)^{1/2} \leqslant \text{Tol}$$

y elemento por elemento

$$h_i^4 \left\|R\left(u^h\right)\right\|_{L^2(x_{i-1},x_i)} \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{\text{Tol}}{k_0}\right)^2$$

Ejercicio

1. *Ejercicio 14.1*

$$v(x) = \int_a^x v'(\xi)\, d\xi \quad v \in H'_{E_0}(a,b) \quad x \in [a,b] \quad H'_{E_0}(a,b) = \{v \in H'(a,b) : v(a) = 0\}$$

$$\begin{aligned}\|v(x)\|_{L^2(a,b)}^2 &= \int_a^b |v(x)|^2\, dx \\ &= \int_a^b \left|\int_a^x v'(\xi)\, d\xi\right|^2 dx\end{aligned}$$

recordando la desigualdad de *Cauchy-Schwarz* $|\langle w, z\rangle| \leqslant \|w\|\,\|z\|$
producto interior en $L^2(a,b)$: $\langle w, z\rangle = \int_a^b wz\, dx$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\int_a^x 1 \cdot v'(\xi)\, d\xi\right|^2 &\leqslant \|1\|_{L^2(a,x)}^2 \|v'(\xi)\|_{L^2(a,x)}^2 \\ &\leqslant (x-a)\|v'(\xi)\|_{L^2(a,b)}^2\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\|v(x)\|_{L^2(a,b)}^2 &\leqslant \int_a^b (x-a)\|v'\|_{L^2(a,b)}^2\, dx \\ &= \|v'\|_{L^2(a,b)}^2 \int_a^b (x-a)\, dx \\ &= \|v'\|_{L^2(a,b)}^2 \left.\frac{(x-a)^2}{2}\right|_a^b \\ &= \frac{(b-a)^2}{2}\|v'\|_{L^2(a,b)}^2\end{aligned}$$

2. $\begin{cases} -p_0 u'' + r_0 u = f(x) & p_0 > 0\,,\ r_0 > 0 \quad f \in C^4[0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$

$x_i = ih \quad i = 0, 1, \ldots, n \qquad h = \dfrac{1}{n}$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - x_{i-1})}{h} & x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i \\ \\ \dfrac{(x_{i+1} - x)}{h} & x_i \leqslant x \end{cases} \qquad \varphi_i'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{h} & x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i \\ \\ -\dfrac{1}{h} & x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1} \end{cases}$$

$Mu = b$

$$M_{ij} = \int_0^1 (p_0 \varphi_i' \varphi_j' + r_0 \varphi_i \varphi_j)\, dx \qquad b_i = \int_0^1 f \varphi_i\, dx$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= \int_0^{x_1} \left(p_0 \frac{1}{h^2} + r_0 \frac{x^2}{h^2} \right) dx + \int_{x_1}^{x_2} \left(p_0 \frac{1}{h^2} + r_0 \frac{(x_2 - x)^2}{h^2} \right) dx \\ &= \frac{2p_0}{h} + \frac{2r_0 h}{3} \end{aligned}$$

$M_{11} = M_{ii} \quad i = 2, \ldots, n-1$
por ser p_0, r_0 constantes

$$\begin{aligned} M_{12} &= \int_0^1 (p_0 \varphi_1' \varphi_2' + r_0 \varphi_1 \varphi_2)\, dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[p_0 \left(-\frac{1}{h} \right) \left(\frac{1}{h} \right) + r_0 \frac{(x_2 - x)^2}{h} \frac{(x_1 - x)^2}{h} \right] dx \\ &= -\frac{p_0}{h} + \frac{r_0 h}{6} \end{aligned}$$

M es simétrica ya que $\mathcal{A}(\cdot,\cdot)$ es simétrica

$$M_{ij} = M_{ji}$$

observamos que la matriz es tridiagonal

$$\begin{aligned} M_{12} &= M_{i(i+1)} \\ &= M_{(i-1)i} \\ &= -\frac{p_0}{h} + \frac{r_0 h}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2p_0}{h} + \frac{2r_0 h}{6} & -\frac{p_0}{h} + \frac{r_0 h}{6} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{p_0}{h} + \frac{r_0 h}{6} & \frac{2p_0}{h} + \frac{2r_0 h}{6} & -\frac{p_0}{h} + \frac{r_0 h}{6} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ldots & -\frac{p_0}{h} + \frac{r_0 h}{6} \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots\ -\frac{p_0}{h} + \frac{r_0 h}{6} & & \frac{2p_0}{h} + \frac{2r_0 h}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \varphi_1 \rangle \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \langle f, \varphi_{n-1} \rangle \end{bmatrix}$$

entonces $\left(-\dfrac{p_0}{h} + \dfrac{r_0 h}{6} \right) u_{i-1} + \left(\dfrac{2p_0}{h} + \dfrac{2r_0 h}{3} \right) u_i + \left(-\dfrac{p_0}{h} + \dfrac{r_0}{h} \right) u_{i+1} = \langle f, \varphi_i \rangle$

entonces $-p_0 \dfrac{(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})}{h^2} + r_0 \dfrac{(u_{i-1} + 4u_i + u_{i+1})}{6} = \dfrac{1}{h} \langle f, \varphi_1 \rangle$

formulación tipica que resulta en el método de diferencias finitas procedemos a calcular $\langle f, \varphi_i \rangle$

$$
\begin{aligned}
\langle f, \varphi_i \rangle &= \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)\,dx \\
&= \int_0^1 \varphi_i(x)\left[f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \ldots\right] dx \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(x - x_{i-1})}{h}\left[f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \ldots\right] dx \\
&\quad + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x_{i+1} - x)}{h}\left[f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \ldots\right] dx \\
&= \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i + x_i - x_{i-1})\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} -(x - x_i + x_i + x_{i+1})\,dx \\
&= \frac{1}{h}\left\{ f(x_i)\frac{(x - x_{i-1})^2}{2} + f'(x_i)\frac{(x - x_i)^3}{3} + h\frac{(x - x_i)^2}{2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{f''(x_i)}{2}\left[\frac{(x - x_i)^4}{4} + h\frac{(x - x_i)^3}{3} + \ldots\right]\right\}\Bigg|_{x_{i-1}}^{x_i} \\
&\quad + \frac{1}{h}\left\{ -f(x_i)\frac{(x - x_{i+1})^2}{2} - f'(x_i)\left[\frac{(x - x_i)^3}{3} - h\frac{(x - x_i)^2}{2}\right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{f''(x_i)}{2}\left[\frac{(x - x_i)^4}{4} - h\frac{(x - x_i)^3}{3} - \ldots\right]\right\}\Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} \\
&= h\,f(x_i) + \mathcal{O}f'(x_i) + \frac{f''(x_i)}{2}\left(\frac{h^3}{12} + \frac{h^3}{12}\right) + \mathcal{O}\left(h^5\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow \frac{1}{h}\langle f, \varphi_i \rangle = f(x_i) + \frac{h^2}{12}f''(x_i) + \mathcal{O}\left(h^4\right) \\
&\Longrightarrow - p_0\frac{(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})}{h^2} + r_0\frac{(u_{i-1} + 4u_i + u_{i+1})}{6} = f(x_i) \\
&\qquad + \frac{1}{12}h^2 f''(x_i) + \mathcal{O}\left(h^4\right) \\
&T_i = -p_0\frac{(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1})}{h^2} + r_0\frac{(u_{i-1} + 4u_i + u_{i+1})}{6} \\
&\quad = \frac{h^2}{12}f''(x_i) + \mathcal{O}\left(h^4\right)
\end{aligned}
$$

de la ecuación diferencial $-p_0 u^4 + r_0 u'' = f''$, entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{h^2}{12}f''(x_i) + \mathcal{O}\left(h^4\right) &= \frac{h^2}{12}\left(-p_0 u^4 + r_0 u''\right) + \mathcal{O}\left(h^4\right) \\
&= \frac{h^2}{12}r_0 u'' - \frac{p_0 h^2}{12}u^4 + \mathcal{O}\left(h^4\right)
\end{aligned}
$$

expandiendo $-\frac{p_0 h^2}{12}u^4$ en series de *Taylor* este término tiene también $\mathcal{O}\left(h^4\right)$

$$
\Longrightarrow \frac{h^2}{12}f''(x_i) + \mathcal{O}\left(h^4\right) = \frac{h^2}{12}r_0 u''(x_i) + \mathcal{O}\left(h^4\right)
$$

si $M = \frac{r_0}{12}\max_{x\in[0,1]} u''(x)$ entonces $\max_{0\leqslant i\leqslant n}\left(u(x_i - u^h(x_i)\right) \leqslant Mh^2$

Problema de Valores de Frontera en Dos Dimensiones

Conceptos Necesarios

Gradiente $\nabla\, u(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}\hat{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\hat{j}$

u **campo escalar**

$$\begin{aligned} u:\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longrightarrow u(x,y) \end{aligned}$$

∇u **campo vectorial**

$$\begin{aligned} \nabla u:\ \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longrightarrow \nabla u(x,y) \end{aligned}$$

Derivada direccional

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} &= \nabla u \cdot n \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta \end{aligned}$$

Flujo
Ω región $\qquad \partial\Omega$ frontera de $\Omega \qquad \sigma$ flujo (campo vectorial)

$$\sigma_n = \sigma \cdot n \qquad\qquad \sum w = \int_{\partial w} \sigma_n(s)\, ds \quad \text{flujo neto en } \partial w$$

en una región rectangular
w tiene área $\Delta x \Delta y$

Divergencia en P_0

Definición

$$\lim_{w\to 0} \frac{\text{flujo neto cruzando la frontera}}{\text{área de la región}} = \text{divergencia del flujo en } P_0$$

en el caso de la región rectangular tenemos

$$\begin{aligned} \text{Flujo neto} &= \Delta y(\sigma_x + \Delta\sigma_x - \sigma_x) + \Delta x(\sigma_y + \Delta\sigma_y - \sigma_y) \\ &= \Delta y\, \Delta\sigma_x + \Delta x\, \Delta\sigma_y \end{aligned}$$

área de la región$=\Delta x\, \Delta y$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{w\to 0 \\ \Delta x\, \Delta y \to 0}} \frac{\Delta y\, \Delta\sigma_x + \Delta x\, \Delta\sigma_y}{\Delta x\, \Delta y} &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta\sigma_x}{\Delta x} + \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta\sigma_y}{\Delta y} \\ &= \left.\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right|_{P_0} \\ &= \operatorname{div}\sigma(P_0) \end{aligned}$$

se denota como $\operatorname{div}\sigma$ o $\nabla\cdot\sigma$

$$\begin{aligned} \nabla &= \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} \\ \sigma &= \sigma_x\hat{i} + \sigma_y\hat{j} \\ \nabla\cdot\sigma &= \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} \end{aligned}$$

$\nabla \cdot \sigma$ flujo neto en un punto

flujo neto en Ω : $\sum \Omega = \int_\Omega \nabla \cdot \sigma \, dA \qquad (dA = dx\, dy)$

este flujo neto en Ω es igual al flujo neto cruzando $\partial\Omega$

$$\int_{\partial\Omega} \nabla \cdot \sigma \, dS \qquad (\sigma_n = \sigma \cdot n)$$

entonces $\int_\Omega \nabla \cdot \sigma \, dA = \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot n \, dS$ teorema de la divergencia de *Gauss*

Desarrollo de Modelos en Ecuaciones Diferenciales Parciales

La ecuación constitutiva $\sigma(x,y) = -k(x,y)\, \nabla u(x,y)\,;\, -k(x,y)$ módulo del material
principio de conservación: flujo neto cruzando la frontera es el flujo aportado por la fuente f

$$\Longrightarrow \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot n \, dS = \int_\Omega f(x,y)\, dA$$

si esto se cumple para cada ω

$$\int_{\partial\omega} \sigma \cdot n \, dS = \int_\omega f(x,y)\, dA$$

por el teorema de la divergencia

$$\int_\omega \nabla \cdot \sigma \, dA = \int_\omega f(x,y)\, dA$$

$$\int_\omega (\nabla \cdot \sigma - f)\, dA = 0$$

como es cierto para cualquier ω en Ω, entonces $\nabla \cdot \sigma - f = 0$ en Ω
para ciertas condiciones de suavidad de f y u

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma &= f(x,y) \,\mathrm{en}\, \sigma \\ \nabla \cdot (-k(x,y)\, \nabla u(x,y)) &= f(x,y) \end{aligned}$$

este modelo considera solamente difusión del flujo, si k es constante entonces

$$\begin{aligned} -k\, \nabla \cdot \nabla u &= f \\ -k\, \nabla^2 u &= f(x,y) \\ -k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &= f(x,y) \quad \text{ecuación de } \textit{Poisson} \end{aligned}$$

Si $f(x,y) = 0$ tenemos que $\nabla^2 u = 0$ ecuación de *Laplace*
también podemos agregar términos al modelo, por ejemplo si existe fuente interna

$$-\nabla \cdot (k\, \nabla u) + b(x,y)\, u = f(x,y)$$

también existen otros mecanismos de flujo, como la convección forzada o advección
para completar nuestra formula de integración por partes en dos y tres dimensiones se puede probar que

$$\nabla \cdot (v\, \nabla u) = v\, \nabla^2 u + \nabla v \cdot \nabla u$$

aplicando el teorema de la divergencia probar que

$$\begin{aligned} -\int_\Omega v\, \nabla^2 u \, dx\, dy &= \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \, dx\, dy - \int_{\partial\Omega} v\, \frac{\partial u}{\partial n}\, dS \\ -v\, \nabla^2 u &= \nabla v \cdot \nabla u - \nabla \cdot (v\, \nabla u) \\ \int_\Omega \nabla \cdot \sigma \, dA &= \int_{\partial\Omega} \sigma \cdot n \, dS \qquad \sigma = v\, \nabla u \\ \Longrightarrow -\int_\Omega v\, \nabla^2 u \, dA &= \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \, dA - \int_{\partial\Omega} v\, \nabla u \cdot n \, dS \\ &= \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \, dA - \int_{\partial\Omega} v\, \frac{\partial u}{\partial n}\, dS \end{aligned}$$

que es nuestra formula de integración por partes, un modelo para problema de difusión

$$-\nabla \cdot (k\,\nabla u) + bu = f$$

intergración por partes (más general)

$$v\nabla \cdot (k\,\nabla u) = \nabla \cdot (vk\,\nabla u) - k\,\nabla u\,\nabla v$$

Condiciones de Frontera en Dos Dimensiones

De *Dirichlet* (condiciones esenciales) $u(s) = \hat{u}(s) \quad s \in \partial\Omega$

De flujo (condiciones naturales) $-k(s)\dfrac{\partial u(s)}{\partial n} = p(s)\,(u(s) - \hat{u}(s))$ ley de enfriamiento de *Newton*

condiciones de flujo cuando existe discontinuidad en el material

$$\left[\!\left[-k\frac{\partial u}{\partial n}\right]\!\right]_{\Gamma} = 0$$

Formulación Débil del Problema de Valor de Frontera en Dos Dimensiones

Ejemplo

$-\nabla^2 u + \lambda u = f(x,y)$ en $\Omega \qquad u(x,y) = 0$ en $\partial\Omega \qquad \lambda$ constante

$$\left(-\nabla^2 u + \lambda u\right)\,v(x,y) = f(x,y)\,v(x,y) \quad \forall\, v \in H_0'$$

integrando

$$\int_\Omega \left(-v\,\nabla^2 u + \lambda u\right)\,v\,dA = \int_\Omega f(x,y)\,dA$$
$$\int_\Omega \left(-v\,\nabla^2 u + \lambda uv\right)\,dA = \int_\Omega f(x,y)\,v\,dA$$

integrando por partes

$$\int_\Omega v\,\nabla^2 u\,dA = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} v\,\frac{\partial u}{\partial n}\,dS$$

entonces nos queda

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dA + \int_\Omega \lambda uv\,dA - \int_{\partial\Omega} v\,\frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \int_\Omega fv\,dA$$
$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + \lambda uv)\,dA = \int_\Omega fv\,dA \qquad \forall\, v \in H_0'(\Omega)$$

la cual es nuestra formulación débil simétrica

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda uv\right)\,dx\,dy = \int_\Omega fv\,dx\,dy$$

la norma H' :

$$\begin{aligned}\|v\|^2_{H'} &= \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial v}{\partial y}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_\Omega \left[v^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\,dx\,dy\end{aligned}$$

obtener las formulaciones débiles en dos y tres dimensiones no representa mayor dificultad, las dificultades se presentan debido a que los elementos pueden tomar muchas formas
interpolando a través de una cuadrática

Interpolación Triangular en Dos Dimensiones

Sea la función lineal $v_h(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y$
observemos que para determinar α, β y γ ocupamos tres puntos independientes en el plano,lo cuales forman triángulos, entonces

$$\begin{aligned} v_1 &= v_h^e(x_1, y_1) \\ &= \alpha_1 + \beta_2 x_1 + \gamma_3 y_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v_2 &= v_h^e(x_2, y_2) \\ &= \alpha_2 + \beta_2 x_2 + \gamma_3 y_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v_3 &= v_h^e(x_3, y_3) \\ &= \alpha_3 + \beta_2 x_3 + \gamma_3 y_3 \end{aligned}$$

en un elemento de Ω_e de Ω, resolviendo el sistema para α, β y γ

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2A_e}\left[v_1(x_2y_3 - x_3y_2) + v_2(x_3y_1 - x_1y_3) + v_3(x_1y_2 - x_2y_1)\right] \\ \beta &= \frac{1}{2A_e}\left[v_1(y_2 - y_3) + v_2(y_3 - y_1) + v_3(y_1 - y_2)\right] \\ \gamma &= \frac{1}{2A_e}\left[v_1(x_3 - x_2) + v_2(x_1 - x_3) + v_3(x_2 - x_1)\right] \end{aligned}$$

con

$$A_e = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

entonces $V_h^e(x, y) = v_1\varphi_1^e(x, y) + v_2\varphi_2^e(x, y) + v_3\varphi_3^e(x, y)$

$$\begin{aligned} \Psi_1^e(x, y) &= \frac{1}{2A_e}[(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \\ \Psi_2^e(x, y) &= \frac{1}{2A_e}[(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \\ \Psi_3^e(x, y) &= \frac{1}{2A_e}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \end{aligned}$$

encontramos α, β y γ con la regla de *Cramer*

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} v_1 & x_1 & y_1 \\ v_2 & x_2 & y_2 \\ v_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}}{|A|} \qquad \beta = \frac{\begin{vmatrix} 1 & v_1 & y_1 \\ 1 & v_2 & y_2 \\ 1 & v_3 & y_3 \end{vmatrix}}{|A|} \qquad \gamma = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & v_1 \\ 1 & x_2 & v_2 \\ 1 & x_3 & v_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

Interpolación con Polinomios de Orden Superior en Dos Dimensiones

$$\begin{array}{ccccccc|l} & & & 1 & & & & \\ & & x & & y & & & \text{grado } 1 \\ & x^2 & & xy & & y^2 & & \text{grado } 2 \\ x^3 & & x^2y & & xy^2 & & y^3 & \text{grado } 3 \end{array}$$

es facil verificar que un polinomio de grado k tiene $\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$ términos, ocupamos $\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$ nodos en cada elemento

Cambio de Coordenadas

$$\begin{aligned} V_h^e(x,y) &= v_1\Psi_1^e(x,y) + v_2\Psi_2^e(x,y) + v_3\Psi_3^e(x,y) \\ &= v_1\Psi_1^e + v_2\Psi_2^e + v_3\Psi_3^e \end{aligned}$$

vamos a pasar de un sistema cartesiano a un sistema de coordenadas naturales o normalizado, el más simple está dado por el triángulo que tiene sus lados en los ejes

$$\xi = 0 \qquad \eta = 0 \qquad 1-\xi-\eta = 0$$

definimos la transformación como

$$T_e : \widehat{\Omega} \longrightarrow \Omega_e \qquad\qquad T_e = \begin{cases} x = x(\xi,\eta) \\ y = y(\xi,\eta) \end{cases}$$

por

$$V_h^e(x,y) : \begin{cases} \widehat{\Psi}_1 = 1-\xi-\eta \\ \widehat{\Psi}_2 = \xi \\ \widehat{\Psi}_3 = \eta \end{cases} \tag{9}$$

$$x = \sum_{j=1}^{3} x_i \widehat{\Psi}_j(\xi,\eta) \qquad y = \sum_{j=1}^{3} y_j \widehat{\Psi}_j(\xi,\eta) \tag{10}$$

sustituyendo (9) en (10) : $T_e^{-1} : \Omega_e \longrightarrow \widehat{\Omega}$

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x,y) \\ &= \frac{1}{2A_e}[(y_3-y_1)(x-x_1)-(x_3-x_1)(y-y_1)] \\ \eta &= \eta(x,y) \\ &= \frac{1}{2A_e}[(y_1-y_2)(x-x_1)-(x_0-x_1)(y-y_1)] \end{aligned}$$

donde A_e representa el área del elemento Ω_e, obtenemos las funciones base

$$\begin{aligned} \Psi_1^e(x,y) &= \widehat{\Psi}_1(\xi,\eta) \\ \Psi_2^e(x,y) &= \widehat{\Psi}_2(\xi,\eta) \\ \Psi_3^e(x,y) &= \widehat{\Psi}_3(\xi,\eta) \end{aligned}$$

Interpolación Rectangular en Dos Dimensiones

Usamos como aproximación de los cuatro puntos un polinomio bilineal, el cual es lineal en las variables x, y que tiene la forma general

$$v(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \qquad a_i \text{ constantes} \quad i = 1,\ldots,4$$

Si $\bar{x}_i = (x_i, y_i)$

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 + a_2x_1 + a_3y_1 + a_4x_1y_1 & \qquad v_2 &= a_1 + a_2x_2 + a_3y_2 + a_4x_2y_2 \\ v_3 &= a_1 + a_2x_3 + a_3y_3 + a_4x_3y_3 & \qquad v_4 &= a_1 + a_2x_4 + a_3y_4 + a_4x_4y_4 \end{aligned}$$

$$f_1(x_1,y_1) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1,y_1) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2,y_1) \qquad f_2(x_1,y_2) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2}f(x_1,y_2) + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2,y_2)$$

el polinomio bilineal que pasa por esos puntos es

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{y-y_2}{y_1-y_2}f_1(x_1,y_1) + \frac{y-y_1}{y_2-y_1}f_2(x_1,y_2) \\ &= \begin{pmatrix} x-x_2 \\ x-x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y-y_2 \\ y-y_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde $c_{ij} = \dfrac{f(x_i, y_j)}{(x_i - x_{3-i})(y_j - y_{3-j})}$ para $i, j = 1, 2$
como las funciones base serán polinomios bilineales, estos cumpliran que en el nodo principal serán uno, y cero en los tres restantes. Sea

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

entonces tendremos los siguientes cuatro casos para la forma que tendra c al definir ϕ_i a trozos

1. $c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} \end{bmatrix}$
2. $c = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{(x_1 - x_2)(y_2 - y_1)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
3. $c = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
4. $c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{(x_2 - x_1)(y_1 - y_2)} & 0 \end{bmatrix}$

Elementos Triangulares y Rectangulares

Lineal $a_1 + a_2x + a_3y$

Cuadrático $a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2$

Cúbico $a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7xy^2 + a_8x^2y + a_9x^3 + a_{10}y^3$

Elemento Estandar Triangular

Cuadráticas (seis funciones base)

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{(1-\xi-\eta)(1/2-\xi-\eta)}{(1-0-0)(1/2-0-0)} \\ &= (1-\xi-\eta)(1-2\xi-2\eta) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Psi_2 &= \frac{(\xi-1/2)\xi}{(1-1/2)1} \\ &= 2(\xi-1/2)\xi \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Psi_3 &= \frac{(\eta-1/2)\eta}{(1-1/2)1} \\ &= 2\eta(\eta-1/2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_4 &= \frac{\xi(1-\xi-\eta)}{1/2(1-1/2-0)} \\ &= 4\xi(1-\xi-\eta) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Psi_5 &= \frac{\xi\eta}{1/2(1/2)} \\ &= 4\xi\eta \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Psi_6 &= \frac{\eta(1-\xi-\eta)}{1/2(1-0-1/2)} \\ &= 4\eta(1-\xi-\eta) \end{aligned}$$

Elemento Estandar Rectangular

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{(\xi+1)(\eta-1)}{(-1-1)(-1-1)} \\ &= \frac{(\xi+1)(\eta-1)}{4} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Psi_2 &= \frac{(\xi+1)(\eta-1)}{(1+1)(-1-1)} \\ &= -\frac{(\xi+1)(\eta-1)}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_3 &= \frac{(\xi+1)(\eta+1)}{(1+1)(1+1)} \\ &= \frac{(\xi+1)(\eta+1)}{4} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Psi_4 &= \frac{(\xi-1)(\eta+1)}{(-1-1)(1+1)} \\ &= -\frac{(\xi-1)(\eta+1)}{4} \end{aligned}$$

Bicuadráticos $a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5xy^2 + a_6x^2y + a_7x^2 + a_8y^2y + a_9x^2y^2$
habria que determinar nueve funciones base

$$\Psi_1 = \frac{\eta(\eta-1)\xi(\xi-1)}{-1(-1-1)-1(-1-1)}$$

Descripción Global y Local de los Elementos

Interpolantes lineales una dimensión
x_i coordenadas de los nodos, n_{el} número de elementos (e)

	Global	Local
Dominio	$[x_i, x_{i+1}]$	$[\xi_1, \xi_2] = [-1, 1]$
Grados de libertad	$\{u_i, u_{i+1}\}$	$\{u_1, u_2\}$
Funciones de forma	$\{\varphi_i, \varphi_{i+1}\}$	$\{\Psi_1, \Psi_2\}$
Función interpolante	$u^h(x) = u_i\varphi_i + u_{i+1}\varphi_{i+1}$	$u^h(\xi) = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2$
Nodos	$\{x_i, x_{i+1}\}$	$\{\xi_1, \xi_2\}$

$$\xi(x) = \frac{2x - x_i - x_{i+1}}{h_i} \qquad x(\xi) = \frac{h_i\xi + x_i + x_{i+1}}{2} \qquad \xi(x_i) = -\frac{h_i}{h_i} = -1 \qquad \xi(x_{i+1}) = 1$$

$$x(-1) = x_i \qquad x(1) = x_{i+1}$$

$$\Psi_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi) \qquad \Psi_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi) \qquad \Psi_1'(\xi) = -\frac{1}{2} \qquad \Psi_2'(\xi) = \frac{1}{2}$$

$$x^e(\xi) = \Psi_1(\xi)x_i^e + \Psi_2(\xi)x_{i+1}^e$$

consideremos el problema modelo

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{du}{dx}\right) + r(x)u = f(x) & a < x < b \\ u(a) = A & u(b) = B \end{cases}$$

$Mu = B$
M matriz global, m^e matriz por elemento
B vector global, b^e vector por elemento sea $M_{ij} = \mathcal{A}(\varphi_i, \varphi_j)$ donde

$$M = \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} M^e \qquad M^e = M_{ij}^e$$

$$B = \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} B^e \qquad B^e = B_i^e$$

$M_{ij}^e = 0$ si $i \neq (e \vee e+1) \vee j \neq (e \vee e+1)$
$B_i^e = 0$ si $i \neq (e \vee e+1)$
$m^e = m_{ij}^e \quad (2\times 2) \quad (i,j = 1,2)$
$b^e = b_i^e \quad (2\times 1) \quad (i = 1,2)$
Matriz y vector (por elemento) con tamaño que depende del grado del interpolante: lineal 2×2, cuadrático 3×3, cúbico 4×4
entonces la estrategia consiste en generar las matrices m^e y vectores b^e para $e = 1,\ldots,n_{\text{el}}$ y luego ensamblar (o armar) M, B a partir de m^e y b^e
Necesitamos cierta información que almacenamos en una matriz llamada LM, las dimensiones de LM son: n_{en} número de nodos del elemento por n_{el}

	1	2	3	$\ldots$	$\ldots$		n_{el}
1	1	2	3	$\ldots$	$\ldots$	$n-2$	$n-1$
2	2	3	$\ldots$	$\ldots$	$n-1$	0	

número de nodos del elemento $\times$ número de elementos. $n_{\text{en}} \times n_{\text{el}}$ (caso de interpolante lineal) entonces podemos ensamblar M con el siguiente algoritmo

$$
\begin{aligned}
M_{ee} &\longleftarrow M_{ee} + m^{e}_{11} \\
M_{e,e+1} &\longleftarrow M_{e,e+1} + m^{e}_{12} \qquad e = 1,\dots,n_{\text{el}}-1 \\
M_{e+1,e} &\longleftarrow M_{e+1,e} + m^{e}_{21} \\
M_{e+1,e+1} &\longleftarrow M_{e+1,e+1} + m^{e}_{22} \\
B_{e} &\longleftarrow B_{e} + b^{e}_{1} \qquad e = 1,\dots,n_{\text{el}}-1 \\
B_{e+1} &\longleftarrow B_{e+1} + b^{e}_{2} \\
\text{para} \quad n_{\text{el}} M_{nn} &\longleftarrow M_{nn} + M^{n_{\text{el}}}_{11} \\
B_{n} &\longleftarrow B_{n} + b^{n_{\text{el}}}_{1}
\end{aligned}
$$

inicialmente $M = 0$

$$
\begin{bmatrix}
m^{1}_{11} & m^{1}_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
m^{1}_{21} & m^{1}_{22} + m^{2}_{11} & m^{2}_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & m^{2}_{21} & m^{2}_{22} + m^{3}_{11} & m^{3}_{12} & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & m^{3}_{21} & m^{3}_{22} & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & m^{n_{\text{el}}-1}_{22} + m^{n_{\text{el}}-1}_{11} & m^{n_{\text{el}}-1}_{12} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & m^{n_{\text{el}}-1}_{21} & m^{n_{\text{el}}-1}_{22} + m^{n_{\text{el}}}_{11}
\end{bmatrix}
\qquad
B = \begin{bmatrix}
b^{1}_{1} \\
b^{1}_{2} + b^{2}_{1} \\
b^{2}_{2} + b^{3}_{1} \\
\vdots \\
b^{n_{\text{el}}-2}_{2} + b^{n_{\text{el}}-1}_{1} \\
b^{n_{\text{el}}-1}_{2} + b^{n_{\text{el}}}_{1}
\end{bmatrix}
$$

Cálculo de la Matriz y Vector por Elemento

Sea $g : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y sea $x = [\xi_1, \xi_2] \longrightarrow [x_1, x_2]$ continuamente derivable con $x(\xi_1)x_1$ y $x(\xi_2)x_2$ entonces

$$
\int_{x_1}^{x_2} g(x)\, dx = \int_{\xi_1}^{\xi_2} g(x(\xi))\, \frac{dx(\xi)}{d\xi}\, d\xi
$$

además como

$$
\frac{\partial g(x(\xi))}{\partial \xi} = \frac{\partial g(x(\xi))}{\partial x}\, \frac{\partial x(\xi)}{\partial \xi}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
m^{e}_{ij} &= \int_{\Omega^e} \left[\frac{d\varphi_j(x)}{dx} \frac{d\varphi_j(x)}{dx} + r(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x) \right] dx \qquad \Omega^{e} : [x_i, x_{i+1}] \\
&= \int_{-1}^{1} \left[p(x(\xi)) \frac{d\varphi_j(x(\xi))}{dx} \frac{d\varphi_j(x(\xi))}{dx} + r(x(\xi))\varphi_i(x(\xi))\varphi_j(x(\xi)) \right] \frac{dx}{d\xi}\, d\xi \\
&= \int_{-1}^{1} \left[p(\xi) \frac{d\Psi_i(\xi)}{d\xi} \frac{d\Psi_j(\xi)}{d\xi} \underbrace{\left(\frac{d\xi}{dx}\right)^{2}}_{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-2}} + r(\xi)\Psi_i(\xi)\Psi_j(\xi) \right] \frac{dx}{d\xi}\, d\xi \quad i,j = 1,2 \\
b^{e}_{i} &= \int_{\Omega^e} f(x)\, \varphi_i(x)\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} f(x(\xi))\, \varphi_i(x(\xi)) \frac{dx}{d\xi}\, d\xi \\
&= \int_{-1}^{1} f(\xi)\, \varphi_i(\xi) \frac{dx}{d\xi}\, d\xi
\end{aligned}
$$

Cuadratura de Gauss en Una Dimensión

El dominio de la cuadratura de *Gauss* está dado por $[-1,1]$ y lo definimos como

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

polinomios de *Legendre*

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n \qquad n=0,\ldots \qquad \text{formula de } \textit{Rodrigues}\\
w_i &= \frac{1}{P^i_{n+1}(x_i)}\int_{-1}^{1}\frac{P_{n+1}(x)}{x-x_i}\,dx\\
\int_{-1}^{1} f(x)\,dx &\approx w_1 f(x_1)+w_2 f(x_2) \quad n=2\\
P_{n+1} &= P_2 = \frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)
\end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad\qquad P'(x) = \frac{1}{2}(6x)$$

$$x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad\qquad = 3x$$

$$w_1 = \frac{1}{3\left(1/\sqrt{3}\right)}\int_{-1}^{1}\frac{\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)}{x-1/\sqrt{3}}\,dx \qquad\qquad w_2 = \frac{1}{3(-1/\sqrt{3})}\int_{-1}^{1}\frac{\frac{1}{2}(3x^2-1)}{x+1/\sqrt{3}}\,dx$$

$$= 1 \qquad\qquad = 1$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

el error es

$$\begin{aligned}
E &= \left|\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} w_i\, f(x_i)\right|\\
&= \frac{2^{2n+3}\left[(n+1)!\right]^n f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+3)\left[(2n+2)!\right]^3} \qquad -1<\xi<1
\end{aligned}$$

Cuadratura de Gauss en Dos Dimensiones en un Rectángulo

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx\right]dy\\
&\approx \int_{-1}^{1}\sum_{i=1}^{n} w_i\, f(x_i,y)\,dx\\
&\approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j\, f(x_i,y_j)
\end{aligned}$$

si tenemos $[a,b]\times[c,d]$, haciendo

$$\begin{aligned}
x &= \frac{(b-a)v+(a+b)}{2} \qquad dx = \frac{(b-a)}{2}\,dv\\
y &= \frac{(d-c)u+(c+d)}{2} \qquad dy = \frac{(d-c)}{2}\,du\\
\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dx\,dy &= \int_a^b\left[\int_{-1}^{1} f\left(x,\frac{(d-c)u+(c+d)}{2}\right)\frac{(d-c)}{2}\,du\right]dx\\
&= \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)v+(a+b)}{2},\frac{(d-c)u+(c+d)}{2}\right)\frac{(b-a)(d-c)}{4}du\,dv
\end{aligned}$$

Ejemplo

Consideremos el problema

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(k\nabla u)+bu=f(x,y) & \text{en}\,\Omega_i \quad i=1,2\\ u(s)=\hat{u}(s) & s\in\partial\Omega_1\\ \sigma_n(s)=p(s)\,\left[u(s)-\hat{u}(s)\right] & s\in\partial\Omega_2\\ [\![k\nabla u\cdot n]\!]=0 & s\,\text{en}\,\Gamma \end{cases}$$

$$\Omega = \Omega_1\cap\Omega_2 \qquad\qquad \partial\Omega=\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2$$

$$\sigma_n(s) = -k(s)\,\frac{\partial u(s)}{\partial n}$$

las ecuaciones paramétricas

$$\partial\Omega:\begin{cases} x=x(s)\\ y=y(s)\end{cases}$$

si $b=0$ y las condiciones de frontera en todo $\partial\Omega$ son naturales, entonces

$$-k(s)\,\frac{\partial u(s)}{\partial n} = \hat{\sigma}(s)$$

1. No existe una única solución al problema
2. Para que pueda existir una única solución se debe satisfacer una condición de compatibilidad

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy=\int_{\partial\Omega}\hat{\sigma}(s)\,ds \qquad \text{(principio de conservación)}$$

la formulación débil es como sigue

$$\int_{\Omega_1}[\nabla\cdot(k_1\nabla u)+bu]v\,dA+\int_{\Omega_2}[-\nabla\cdot(k_2\nabla u)+bu]v\,dA=\int_\Omega fv\,dA \qquad \forall\, v\in H'(\Omega)$$

sabemos que $v\nabla\cdot(k\nabla u)=\nabla\cdot(vk\nabla u)-k\nabla u\cdot\nabla v$, entonces sustituyendo

$$\int_{\Omega_1}[k\nabla u\cdot\nabla v-\nabla\cdot(vk\nabla u)+buv]\,dA+\int_{\Omega_2}[k\nabla u\cdot\nabla v-\nabla\cdot(vk\nabla u)+buv]\,dA=\int_\Omega fv\,dA$$

por el teorema de la divergencia

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_i}\nabla\cdot(vk\nabla u)\,dA &= \int_{\partial\Omega_i} vk\nabla u\cdot n\,dS\\ &= \int_{\partial\Omega_i} k\,\frac{\partial u}{\partial n}v\,dS \quad i=1,2\end{aligned}$$

entonces sustituyendo

$$\begin{aligned}\int_\Omega[k\nabla u\cdot\nabla v+buv]\,dA &= \int_\Omega fv\,dA+\int_{\partial\Omega}k\,\frac{\partial u}{\partial n}v\,dS\\ &= \int_\Omega fv\,dA+\int_{\partial\Omega}v\,p(s)\,\left[u(s)-\hat{u}(s)\right]\,dS \qquad \forall\,v\in H'(\Omega)\quad u\in H'(\Omega)\end{aligned}$$

como $u=\hat{u}$ en $\partial\Omega_1$ entonces

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}p\,(u-\hat{u})\,v\,dS &= \int_{\partial\Omega}puv\,dS-\int_{\partial\Omega}p\hat{u}v\,dS\\ &= \int_{\partial\Omega_2}puv\,dS-\int_{\partial\Omega_2}p\hat{u}v\,dS \quad \text{para}\,v\in H_0'\,\text{en}\,\partial\Omega_1\end{aligned}$$

entonces

$$\int_{\Omega} [k\nabla u \cdot \nabla v + buv]\, dA = \int_{\Omega} fv\, dA - \int_{\partial\Omega_2} puv\, dS - \int_{\partial\Omega_2} p\hat{u}v\, dS$$

$$\int_{\Omega} (k\nabla u \cdot \nabla v + buv)\, dA + \int_{\partial\Omega_2} puv\, dS = \int_{\Omega} fv\, dA + \int_{\partial\Omega_2} p\hat{u}v\, dS$$

la cual es nuestra formulación débil.
Asi, el problema consiste en determinar $u \in H'(\Omega)$ tal que $u = \hat{u}$ en $\partial\Omega_1$ y $v \in H'_0(\Omega)$ en $\partial\Omega_1$ ($v \in H'(\Omega)$ en $\partial\Omega_2$
u^h: aproximación de u en un subespacio $S^h \subset H'(\Omega)$
v^h: aproximación de v en un subespacio $S^h \subset H'(\Omega)$
Ω^h: región discretizada

$$u^h = \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i(x,y) \qquad\qquad v^h = \sum_{j=1}^{N} v_i \varphi_j(x,y)$$

$$\hat{u}^h(x,y) = \sum_{j=1}^{n-\text{nodos}} \hat{u}_j \varphi_j(x(s), y(s))$$

entonces

$$\int_{\Omega} \left[k \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y} \right) + b\varphi_i\varphi_j \right] dA + \int_{\partial\Omega_2^h} p\varphi_i\varphi_j = \int_{S^h} f\varphi_i\, dA + \int_{\partial\Omega_2^h} \gamma\varphi_i\, dS$$

donde $\gamma = p\hat{u}$, asi tenemos $\sum_{j=1}^{N} M_{ij}u_j = F_i \quad i = 1, 2, \ldots, N$

$$M_{ij} = \int_{\Omega^h} \left[k \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y} \right) + b\varphi_i\varphi_j \right] dx\, dy + \int_{\partial\Omega_2^h} p\varphi_i\varphi_j\, dS$$

$$F_i = \int_{\Omega^h} f\,\varphi_i\, dx\, dy + \int_{\partial\Omega_2^h} \gamma\varphi_j\, dS$$

en cada elemento

$$\int_{\Omega} \left(k\nabla u^{he} \cdot \nabla v^{he} + bu^{he}v^{he} \right) dA = \int_{\Omega^e} fv^{he}\, dA - \int_{\partial\Omega^e} \sigma_n v^{he}\, dS$$

si $v^h = 0$ en $\partial\Omega_1^h$ entonces no habra contribución a la integral de elementos con lados en $\partial\Omega_1^h$

$$u^{he} = \sum_{j=1}^{N_e} u_j^e \Psi_j^e(x,y) \qquad\qquad v^{he} = \sum_{j=1}^{N_e} v_j^e \Psi_j^e(x,y)$$

N_e: número de nodos en Ω^e
Ψ_i^e: funciones de onda locales
por ejemplo: interpolante lineal en dos dimensiones en un triángulo $N_e = 3$, entonces

$$\sum_{j=1}^{N_e} m_{ij}^e u_j^e = f_i^e - \sigma_i^e \qquad i = 1, 2, \ldots, N_e$$

con interpolantes lineales y elementos triangulares m es una matriz de 3×3

$$m_{ij}^e = \int_{S^e} \left[k \left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial x}\frac{\partial\Psi_j}{\partial x} + \frac{\partial\Psi_i}{\partial y}\frac{\partial\Psi_j}{\partial y} \right) + b\Psi_i\Psi_j \right] dx\, dy$$

$$f_i^e = \int_{\Omega^e} f\,\Psi_i^e\, dx\, dy$$

$$\sigma_i^e = \int_{\partial\Omega^e} \sigma_n\,\Psi_i^e\, dS$$

m^e será una matriz de $N \times N$. M^e con ceros excepto en las filas y columnas correspondientes a los nodos en el elemento Ω^e, f^e y σ^e se expanden a un vector $N \times 1$ $\quad F^e, \sigma^e$ con entradas no cero solamente en las filas correspondientes a los nodos de Ω^e, entonces

$$\sum_{e=1}^{N_{\text{el}}} \int_{\Omega^e} \left[k \left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_i}{\partial y} \frac{\partial \Psi_j}{\partial y} \right) + b \Psi_i \Psi_j \right] dA = \sum_{e=1}^{N_{\text{el}}} M_{ij}^e$$

$$\sum_{e=1}^{N_{\text{el}}} \int_{\Omega^e} p \varphi_i \, dx \, dy = \sum_{i=1}^{N_{\text{el}}} F_i^e \qquad i, j = 1, \ldots, N_{\text{el}}$$

$$\sum_{e=1}^{N_{\text{el}}} \left(M_{ij}^e u_j - F_i^e + \Sigma_i^e \right) = 0 \qquad i, j = 1, \ldots, N_{\text{el}}$$

N_{el}: número de elementos
las contirbuciones a M_{ij}, F_i provenientes de las condiciones de frontera entran por medio de los términos Σ_i^e
la suma de las integrales de contorno

$$\sum_{e=1}^{N_{\text{el}}} \Sigma_i^e = S_i^{(0)} + S_i^{(1)} + S_i^{(2)} \qquad i = 1, 2, \ldots, N_{\text{el}}$$

donde

$$S_i^{(0)} = \sum_{e=1}^{N_{\text{el}}} \int_{\partial\Omega^e - \partial\Omega^h} \sigma_n \varphi_i \, dS \qquad \text{(en nodos interiores)}$$

$$S_i^{(1)} = \int_{\partial\Omega_1^h} \sigma_n \varphi_i \, dS$$

$$S_i^{(2)} = \int_{\partial\Omega_2^h} \sigma_n \varphi_i \, dS$$

Ejemplo

1. Todos son elementos interiores

$$\begin{aligned} S_1^{(0)} &= \sum_{e=1}^{4} \int_{\partial\Omega^e} \sigma_n \varphi_1 \, dS \\ &= \int_{\Gamma_1} [\![\sigma_n]\!] \varphi_1 \, dS + \int_{\Gamma_2} [\![\sigma_n]\!] \varphi_1 \, dS + \int_{\Gamma_3} [\![\sigma_n]\!] \varphi_1 \, dS + \int_{\Gamma_4} [\![\sigma_n]\!] \varphi_1 \, dS \qquad [\![\sigma_n]\!] = 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

en este ejemplo tenemos condiciones esenciales o de *Dirichlet*, entonces σ_n no se conoce en $\partial\Omega_1^h$ entonces no podemos calcular $S_i^{(1)}$ hasta el final
$S_i^{(2)}$: $\sigma_n(s) = p(s) u^h(s) - \gamma(s)$

$$\begin{aligned} S_i^{(2)} &\approx \int_{\partial\Omega_2^h} \left(p \sum u_i \varphi_j - \gamma \right) \varphi_i \, dS \\ &= \sum_{j=1}^{N_{\text{el}}} p_{ij} u_j - \gamma_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \int_{\partial\Omega_2^h} \gamma \varphi_i \, dS \\ &= \sum_{e=1}^{N_{\text{el}}} \int_{\partial\Omega_2^h} \gamma \varphi_i \, dS \\ &= \sum_{i=1}^{N_{\text{el}}} \gamma_i \end{aligned} \qquad \begin{aligned} P_{ij} &= \int_{\partial\Omega_2^h} p \varphi_i \varphi_j \, dS \\ &= \sum_{e=1}^{N_{\text{el}}} \int_{\partial\Omega_2^h} p \varphi_i \varphi_j \, dS \\ &= \sum_{e=1}^{N_{\text{el}}} P_{ij}^e \end{aligned}$$

entonces $\displaystyle\sum_{j=1}^{N_{\text{el}}} M_{ij} u_j = F_i S_i^{(2)} \qquad i = 1, 2, \ldots, N_{\text{el}}$

$$M_{ij} = \sum_{e=1}^{N_{\text{el}}} \left(M_{ij}^e + P_{ij}^e \right) \qquad F_i = \sum_{i=1}^{N_{\text{el}}} \left(F_i^e + \gamma_{ij}^e \right)$$

2. $\begin{cases} -\nabla^2 u(x,y) = f(x,y)\,\text{en}\,\Omega \\ u(x,y) = 0\,\text{en}\,\Gamma_{41} \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0\,\text{en}\,\Gamma_{12}\,,\,\Gamma_{25}\,,\,\Gamma_{67}\,,\,\Gamma_{74} \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u = \gamma\,\text{en}\,\Gamma_{56} \end{cases}$

determinar el sistema lineal de ecuaciones: seis elementos triangulares, siete nodos
el sistema lineal es de la forma

$$\sum_{e=1}^{6}\left(M_{ij}^{e}u_{j}^{e} - F_{i}^{e} + \Sigma_{i}^{e}\right) = 0 \quad i = 1,\ldots,6 \qquad \sum_{e=1}^{N_{\mathrm{el}}}\Sigma_{i}^{e} = S_{i}^{(0)} + S_{i}^{(1)} + S_{i}^{(2)}$$

$S_{i}^{(0)} = 0\,,\; S_{i}^{(1)}$ no lo podemos conocer

$$\sum_{e=1}^{6} M_{ij}^{e}u_{i}^{e} = \sum_{e=1}^{6} F_{i}^{e} - S_{i}^{(2)} \qquad S_{i}^{(2)} = \sum_{j=1}^{N} P_{ij}u_{j} - \gamma_{i}$$

$$P_{ij} = \sum_{e=1}^{6} P_{ij}^{e} \qquad \gamma_{i} = \sum_{e=1}^{6} \gamma_{i}^{e}$$

$$M_{ij} = \sum_{e=1}^{6}\left(M_{ij}^{e} + P_{ij}^{e}\right) \qquad F_{i} = \sum_{e=1}^{6}\left(F_{i}^{e} + \gamma_{i}^{e}\right)$$

funciones base lineales en dos variables
$e = 1$

$$M^{1} = \begin{bmatrix} m_{11}^{1} & m_{12}^{1} & m_{13}^{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21}^{1} & m_{22}^{1} & m_{23}^{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{31}^{1} & m_{32}^{1} & m_{33}^{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M^{2} = \begin{bmatrix} m_{11}^{2} & 0 & m_{12}^{2} & m_{13}^{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21}^{2} & 0 & m_{22}^{2} & m_{23}^{2} & 0 & 0 & 0 \\ m_{31}^{2} & 0 & m_{32}^{2} & m_{33}^{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^{3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{11}^{3} & m_{12}^{3} & 0 & m_{13}^{3} & 0 & 0 \\ 0 & m_{21}^{3} & m_{22}^{3} & 0 & m_{23}^{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{31}^{3} & m_{32}^{3} & 0 & m_{33}^{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M^{4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{11}^{4} & m_{12}^{4} & 0 & 0 & m_{13}^{4} \\ 0 & 0 & m_{21}^{4} & m_{22}^{4} & 0 & 0 & m_{23}^{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{31}^{4} & m_{32}^{4} & 0 & 0 & m_{33}^{4} \end{bmatrix}$$

$$M^{5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{11}^{5} & 0 & 0 & m_{12}^{5} & m_{13}^{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{21}^{5} & 0 & 0 & m_{22}^{5} & m_{23}^{5} \\ 0 & 0 & m_{31}^{5} & m_{32}^{5} & 0 & 0 & m_{33}^{5} \end{bmatrix} \qquad M^{6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{11}^{6} & 0 & m_{12}^{6} & m_{13}^{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{21}^{6} & 0 & m_{22}^{6} & m_{23}^{6} & 0 \\ 0 & 0 & m_{31}^{6} & 0 & m_{32}^{6} & m_{33}^{6} & 0 \end{bmatrix}$$

$$F^{1} = \begin{bmatrix} f_{1}^{1} \\ f_{2}^{1} \\ f_{3}^{1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad F^{2} = \begin{bmatrix} f_{1}^{2} \\ 0 \\ f_{2}^{2} \\ 0 \\ f_{3}^{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad F^{3} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_{1}^{3} \\ f_{2}^{3} \\ 0 \\ f_{3}^{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad F^{4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{1}^{4} \\ f_{2}^{4} \\ 0 \\ 0 \\ f_{3}^{4} \end{bmatrix} \quad F^{5} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{1}^{5} \\ 0 \\ 0 \\ f_{2}^{5} \\ f_{3}^{5} \end{bmatrix} \quad F^{6} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{1}^{6} \\ 0 \\ f_{2}^{6} \\ f_{3}^{6} \\ 0 \end{bmatrix}$$

entonces $Mu = F - \Sigma$

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} & M_{16} & M_{17} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} & M_{26} & M_{27} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} & M_{36} & M_{37} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} & M_{46} & M_{47} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & \widetilde{M}_{55} & \widetilde{M}_{56} & M_{57} \\ M_{61} & M_{62} & M_{63} & M_{64} & \widetilde{M}_{65} & \widetilde{M}_{66} & M_{67} \\ M_{71} & M_{72} & M_{73} & M_{74} & M_{75} & M_{76} & M_{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^1 \\ F^2 \\ F^3 \\ F^4 \\ \widetilde{F}^5 \\ \widetilde{F}^6 \\ F^7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ 0 \\ 0 \\ \Sigma_4 \\ \Sigma_5 \\ \Sigma_6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$F^1 = f_1^1 + f_1^2 + \dots$

$$\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma^5 \\ \gamma^6 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{55} & P_{56} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{65} & P_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$M_{ij} = \widetilde{M}_{ij} + P_{ij} \qquad F_i = \widetilde{F}_i + \gamma_i$

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} & M_{16} & M_{17} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} & M_{26} & M_{27} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} & M_{36} & M_{37} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} & M_{46} & M_{47} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} & M_{56} & M_{57} \\ M_{61} & M_{62} & M_{63} & M_{64} & M_{65} & M_{66} & M_{67} \\ M_{71} & M_{72} & M_{73} & M_{74} & M_{75} & M_{76} & M_{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 - \Sigma_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 - \Sigma_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} M_{55} &= \widetilde{M}_{55} + P_{55} & \qquad F_5 &= \widetilde{F}_5 + \gamma_5 \\ M_{56} &= \widetilde{M}_{56} + P_{56} & \qquad F_6 &= \widetilde{F}_6 + \gamma_6 \\ M_{65} &= \widetilde{M}_{65} + P_{65} \\ M_{66} &= \widetilde{M}_{66} + P_{66} \end{aligned}$$

sabemos que $u_1 = u_4 = 0$ (por condición de frontera), entonces resulta un sistema de cinco ecuaciones

$$\begin{bmatrix} M_{22} & M_{23} & M_{25} & M_{26} & M_{27} \\ M_{32} & M_{33} & M_{35} & M_{36} & M_{37} \\ M_{52} & M_{53} & M_{55} & M_{56} & M_{57} \\ M_{62} & M_{63} & M_{65} & M_{66} & M_{67} \\ M_{72} & M_{73} & M_{75} & M_{76} & M_{77} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \end{bmatrix}$$

el flujo en uno y cuatro se puede calcular después de resolver el sistema $(u_2, u_3, u_5, u_6, u_7)$

$$\begin{aligned} M_{11}u_1 + M_{12}u_2 + M_{13}u_3 + M_{14}u_4 + M_{15}u_5 + M_{16}u_6 + M_{17}u_7 &= F_1 - \Sigma_1 \\ M_{41}u_1 + M_{42}u_2 + M_{43}u_3 + M_{44}u_4 + M_{45}u_5 + M_{46}u_6 + M_{47}u_7 &= F_4 - \Sigma_4 \end{aligned}$$

se despejan Σ_1 y Σ_4

$$M=\begin{bmatrix}
m^{1}_{11}+m^{2}_{11} & m^{1}_{12} & m^{1}_{13}+m^{2}_{12} & m^{2}_{13} & 0 & 0 & 0\\
m^{1}_{21} & m^{1}_{22}+m^{3}_{11} & m^{1}_{23}+m^{3}_{12} & 0 & m^{3}_{13} & 0 & 0\\
m^{1}_{31}+m^{1}_{21} & m^{1}_{32}+m^{3}_{21} & m^{1}_{33}+m^{2}_{32}+m^{3}_{22}+m^{4}_{11}+m^{5}_{11}+m^{6}_{11} & m^{2}_{23}+m^{2}_{14} & m^{3}_{23}+m^{6}_{12} & m^{5}_{12}+m^{6}_{13} & m^{4}_{13}+m^{5}_{13}\\
m^{2}_{31} & 0 & m^{2}_{32}+m^{4}_{21} & m^{2}_{33}+m^{4}_{22} & 0 & 0 & m^{4}_{23}\\
0 & m^{3}_{31} & m^{3}_{32}+m^{6}_{21} & 0 & m^{3}_{33}+m^{6}_{22} & m^{6}_{23} & 0\\
0 & 0 & m^{5}_{21}+m^{6}_{31} & 0 & m^{6}_{32} & m^{5}_{22}+m^{6}_{33} & m^{5}_{23}\\
0 & 0 & m^{4}_{31}+m^{5}_{31} & m^{4}_{32} & 0 & m^{5}_{32} & m^{4}_{33}+m^{5}_{13}
\end{bmatrix}$$

Cuadratura Gaussiana en Dos Dimensiones

Elemento Rectangular

$$\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\,d\xi\right]d\eta = \int_{-1}^{1}\sum w_i\, f(\xi,\eta)\,d\eta$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} w_i w_j\, f(\xi_i,\eta_i)$$

donde ξ_i y η_i son las raices del polinomio de *Legendre* de grado n

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\partial^{(n)}}{\partial x}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$$
$$w_i = \int_{-1}^{1}\prod_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

Elemento Triangular

$$\int_0^1\int_0^{mx+a} f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

Coordenadas de Área

$L_1 = \dfrac{A_1}{A} \qquad L_2 = \dfrac{A_2}{A} \qquad L_3 = \dfrac{A_3}{A}$

$A_1 + A_2 + A_3 = A \Longrightarrow L_1 + L_2 + L_3 = 1$

$$A = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{Vmatrix}$$

$$L_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{\begin{Vmatrix} x & x_2 & x_3\\ y & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{Vmatrix}} \qquad L_2 = \frac{A_2}{A} = \frac{\begin{Vmatrix} x_1 & x & x_3\\ y_1 & y & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{Vmatrix}} \qquad L_3 = \frac{A_3}{A} = \frac{\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x\\ y_1 & y_2 & y\\ 1 & 1 & 1\end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{Vmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} L_1\\ L_2\\ L_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\\ y\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3\\ y &= L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3\\ 1 &= L_1 + L_2 + L_3\end{aligned}$$

$$\int_0^1\int_0^{1-L_1} f\left(L_1, L_2, L_3\right)\,dL_2\,dL_3$$

Orden	Figura	Error	Puntos	Coordenadas triangulares	Coeficientes
Primer orden		$\mathcal{O}(h^2)$	a	1/3 1/3 1/3	1
Segundo orden		$\mathcal{O}(h^3)$	a, b, c	1/2 1/2 0 0 1/2 1/2 1/2 0 1/2	1/3 1/3 1/3

Ejemplo

$$\begin{aligned}
\int_R \cos(x+y)\,dx\,dy &= \int_0^2 \int_0^{-1/2x+1} \cos(x+y)\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-L_1} f\left(L_1, L_2, L_3\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i\, f\left(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} w_i\, f\left(L_{1i}x_1 + L_{2i}x_2 + L_{3i}x_3, L_{1i}y_1 + L_{2i}y_2 + L_{3i}y_3\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1\, f\left(\frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot 0, \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 1\right) \\
&= 1\, f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\
&= \cos\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) \\
&= \cos 1 \\
&\approx 0.5403
\end{aligned}$$

Cuadratura Gaussiana en Tres Dimensiones

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \sum_i \sum_j \sum_k w_i w_j w_k\, f(x_i, y_j, z_k)$$

$$\begin{aligned}
\int_R f(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \int_0^{1-L_2} f\left(L_1, L_2, L_3, L_4\right)\, dL_1\, dL_2\, dL_3 \\
&= \sum_i w_i\, f\left(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}, L_{4i}\right)
\end{aligned}$$

Elemento Tetrahédrico

$$L_1 = \frac{\text{Volumen}\,(PJKL)}{\text{Volumen}\,(IJKL)} \qquad L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1$$

Elemento Tetrahédrico 4-Puntos

$$\begin{aligned}
\phi(x,y,z) &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z \\
&= \begin{bmatrix} 1 & x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \qquad *
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{p} a_i x^j y^k z^l P \qquad = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$$

$$u_1 = a_1 + a_2 x_1 + a_3 y_1 + a_4 z_1 \qquad u_2 = a_1 + a_2 x_2 + a_3 y_2 + a_4 z_2$$

$$u_3 = a_1 + a_2 x_3 + a_3 y_3 + a_4 z_3 \qquad u_4 = a_1 + a_2 x_4 + a_3 y_4 + a_4 z_4$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}^T = M^{-1} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix}^T \qquad \star$$

sustituyendo $\star$ en $*$ nos queda

$$\begin{aligned}\phi(x,y,z) &= \begin{bmatrix}1 & x & y & z\end{bmatrix} M^{-1} \begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}N_1 & N_2 & N_3 & N_4\end{bmatrix} \begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}\end{aligned}$$

donde los $N_i = \dfrac{V_i}{V}$

$$V_1 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ x_2 & x_4 & x_3 & x\\ y_2 & y_4 & y_3 & x\\ z_2 & z_4 & z_3 & z\end{bmatrix} \qquad V_2 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ x_3 & x_1 & x_4 & x\\ y_3 & y_1 & y_4 & y\\ z_3 & z_1 & z_4 & z\end{bmatrix}$$

$$V_3 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ x_4 & x_2 & x_1 & x\\ y_4 & y_2 & y_1 & x\\ z_4 & z_2 & z_1 & z\end{bmatrix} \qquad V_4 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ x_1 & x_3 & x_2 & x\\ y_1 & y_3 & y_2 & y\\ z_1 & z_3 & z_2 & z\end{bmatrix}$$

Elemento Tetrahédrico 10-Puntos Cudrático

Funciones de interpolación en los vértices

$$\begin{aligned} N_1 &= (2L_1 - 1)\ L_1 & \qquad N_4 &= (2L_4 - 1)\ L_4\\ N_2 &= (2L_2 - 1)\ L_2 & N_5 &= 4L_1L_2\\ N_3 &= (2L_3 - 1)\ L_3 & N_6 &= 4L_1L_3 \end{aligned}$$